Universität für Bodenkultur Wien

Department für Bautechnik und Naturgefahren
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau

Beschränkung der Rissbreiten einer Stahlbetonfassade durch Optimierung der Befestigungsanordnung

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplomingenieur

erstellt von

WOLFGANG SCHOLZ

Betreuer: O. Univ.-Prof. DI DDr. Konrad Bergmeister, Msc.
Mitbetreuer: Dipl. Ing. Stefan Lachinger

Matrikelnummer: 0540564

April, 2012

Danksagung

Mein Dank gilt O. Univ.-Prof. DI DDr. Konrad Bergmeister, Msc., der mir die Möglichkeit gegeben hat, am Institut für Konstruktiven Ingenieurbau meine Diplomarbeit zu verfassen.

Besonders möchte ich mich bei DI Stefan Lachinger bedanken, der mir jederzeit bei Fragen und Problemen zur Verfügung stand und mich vor allem im Bereich der nichtlinearen Finite Element Modellierung mit fachlicher Kompetenz unterstützte. Für Hilfestellungen der statistischen Auswertung hat sich Assoc. Prof. Dr. Alfred Strauss die Zeit genommen mir meine Fragen zu beantworten, besonderen Dank gilt also auch ihm.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir das Studieren ermöglichten und mich in Phasen der Stagnation motiviert und unterstützt haben.

Eidesstattliche Erklärung

„Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche gekennzeichnet habe."

Datum	Unterschrift

Zusammenfassung

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Optimierung der Befestigungsanordnung einer modellierten Stahlbetonfassade zur Einschränkung von Rissbildungen. Die Optimierung wurde mit Hilfe eines nichtlinearen Finite Element Programms durchgeführt. Am Beginn der Arbeit wurde versucht, den Iterationsablauf einer physikalisch nichtlinearen Finite Element Berechnung für den ebenen Spannungszustand von Stahlbeton schematisch zu erklären. Das Verständnis der einzelnen Berechnungsschritte ist dabei ein wichtiges Hilfsmittel zur richtigen Definition der Eingabeparameter sowie zur Einschätzung der Ergebnisse. Die Darstellung soll vor allem den approximativen Charakter der Finite-Element-Methode aufzeigen, welcher sich bei nichtlinearen Verfahren noch verstärkt. In der Optimierung der Stahlbetonfassade wurde durch schrittweise Änderung der Position und Anzahl an Befestigungsmittel versucht, die Rissbildung auf eine bestimmte Rissbreite zu beschränken. Die große Längenausdehnung der gezwängten monolithischen Fassade und die hohen Temperatureinwirkungen sind der Grund für die großen Zwangspannungen und Rissbildungen innerhalb des Bauteils. Wichtig war die Vermeidung von großen Sammelrissen, um den Wassereintritt in die Struktur zu verhindern. Dadurch sollte der Korrosionsschutz der Bewehrung und die damit verbundene langfristige Tragfähigkeit sichergestellt werden. Optimierungsverfahren sollen möglichst wirtschaftliche Ergebnisse unter Einhaltung der vorgeschriebenen Anforderungen erzielen. Im Fall der Fassade stellten die Befestigungsmittel einen wesentlichen Kostenfaktor der Konstruktion dar. Eine optimierte Anordnung und Anzahl an Befestigungsmittel erlaubt eine effektive rissverteilende Wirkung. Die Anpassung der Lage der Befestigungsmittel erfolgte iterativ zur Reduktion der Rissbreiten und der Rissgruppierungen. Eine Zuverlässigkeitsanalyse von definierten Systemantworten der Fassade erfolgte, um den streuenden Charakter der Materialparameter auf die Rissbildung zu ermitteln.

Abstract

The thesis is dealing with the optimization of a fixture arrangement of a modelled reinforced concrete facade to limitate the crack formation. The optimization was conducted with a nonlinear finite element program. The first part tries to explain the iteration procedure of a finite element analysis for reinforced concrete under plane stress. Understanding the steps of the procedure is very important, when setting the material parameters and assessing the structure's behavior. In the first place the description should point out the approximative nature of the finite element analysis, especially in the nonlinear approach. The optimization of the reinforced concrete facade was done by the progressive change of the position and number of fixtures to limitate the crack propagation to a certain crack width. The large longitudinal extent of the restrained monolithic facade and the high temperature effects lead to the intense restraint stresses and crack formations. Particularly important was the prevention of large single cracks to protect the structure from water ingress and reinforcement corrosion. Therefore, an appropriate crack propagation should be achieved to ensure the long term resistance. The aim of optimization methods are mostly economical results in compliance with the prescribed requirements. In the case of the facade, the fixtures were one of the major cost factors. An optimized arrangement and number of fixtures cause an effektiv crack propagation. The adjustment of the fixture arrangement was an iterative procedure to reduce the crack width and improve the crack propagation. Finally a reliability analysis of defined structure responses was carried out to determine the effect of uncertainties of the material parameters on the crack formation.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung **1**

2. Finite-Element-Methode **3**
2.1. Lineare diskrete Systeme 4
2.1.1. Herleitung der linearen Elementmatrizen 5
2.1.2. Allgemeines zum Näherungsverhalten von Finite Elemente Methoden 7
2.2. Nichtlineare diskrete Systeme 8
2.2.1. Herleitung der tangentialen Gleichgewichtsbedingung 10
2.2.2. Herleitung der tangentialen Elementsteifigkeitsmatrizen 11
2.2.3. Referenzsysteme 15
2.2.4. Pfadverfolgungsalgorithmen 18

3. Materialmodell für Beton im zweiachsialen Spannungszustand **23**
3.1. Ermittlung der Werkstoffmatrizen im ungerissenen Zustand 25
3.2. Ermittlung der Werkstoffmatrizen im gerissenen Zustand 29

4. Fallstudie integrale Fassade **32**
4.1. Eingabeparameter des Modells in ATENA 2D 32
4.1.1. Werkstoffe 32
4.1.2. Topologie 36
4.1.3. Randbedingungen 37
4.1.4. Einwirkungen 41
4.1.5. Lastgeschiche und Pfadverfolgungsalgorithmus 43
4.2. Optimierung der Anordnung der Befestigungsmittel 44
4.2.1. Einhaltung der Gebrauchstauglichkeit 44
4.2.2. Einhaltung der Tragfähigkeit 55

5. Zuverlässigkeit der Fassade **62**

6. Diskussion **71**

Literaturverzeichnis **73**

Anhang **74**

A. Auszug der grafischen Ergebnisse der Optimierung **75**

B. Programmierungen **79**

Abkürzungsverzeichnis

α_T	Wärmedehnzahl
A	Querschnittfläche
β	Zuverlässigkeitsindex
C	Bemessungswert des Gebrauchstauglichkeitskriteriums
CV	Variationskoeffizient
ϵ	Abbruchkriterium
ϵ_{tol}	Genauigkeitsschranke
E	Elastizitätsmodul; Verteilung einer bestimmten Systemantwort
γ	Wichte; Teilsicherheitsbeiwert
G	Schubmodul; Zustandsfunktion
G_f	Bruchenergie
f_{ck}	charakteristische Zylinderdruckfestigkeit von Beton
f_{tm}	mittlere Zugfestigkeit von Beton
f_{yk}	charakteristische Streckgrenze
I	Trägheitsmoment
k	Steifigkeit
λ	Lastfaktor
MV	Mittelwert
ν	Querdehnzahl
Π	Potenzial
PDF	Verteilungsfunktion
p_f	operative Versagenswahrscheinlichkeit
PvV	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
ρ	Bewehrungsgrad
s_x	Standardabweichung von x
w	aufgezwungene Verschiebung, Rissweite
$\overline{x}$	Mittelwert von x
Z_{it}	iterative Norm
Z_{ref}	Referenznorm

Vektoren

$\underline{\alpha}$ Koeffizienten der Ansatzfunktionen

$\underline{\varepsilon}$ Dehnungsvektor eines Elements

$\underline{F}$ Vektor der inneren Kräfte des Gesamtsystems

$\underline{\mathrm{f}}$ Vektor der inneren Kräfte eines Elements

$\underline{P}$ Lastvektor des Gesamtsystems

$\underline{p}$ Vektor der Volumskräfte eines Elements

$\underline{q}$ Lastvektor eines Elements

$\underline{\sigma}$ Spannungsvektor eines Elements

$\underline{u}$ Verschiebungsfeld

$\underline{V}$ Verschiebungsvektor des Gesamtsystems

$\underline{v}$ Verschiebungsvektor eines Elements

Matrizen

$\underline{B}$ Verträglichkeitsmatrix

$\underline{D}$ Werkstoffmatrix

$\underline{D_k}$ Matrix der kinematischen Gleichungen

$\underline{K}$ Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems

$\underline{k}$ Steifigkeitsmatrix eines Elements

$\underline{N}$ Matrix der Formfunktionen

$\underline{N_a}$ Matrix der Ansatzfunktion

$\underline{T}$ Transformationsmatrix

Indizes

12 Hauptrichtungen

c Beton

eq äquivalent

G Eigengewicht

g geometrisch

i Iterationsschritt

j Elementbezeichnung

nl nichtlinear

S Sekante; Schwinden

s Stahl

T Tangentiale; Temperatur

1. Einleitung

Auf dem Gelände des ehemaligen Heims für psychisch Kranke (Stadlhof) in der Gemeinde Pfatten in Südtirol wurde von der Landesverwaltung beschlossen neue Räumlichkeiten für die deutsche Fachschule für Obst-, Wein-, und Gartenbau, die italienische Fachschule für Landwirtschaft, das Versuchszentrum Laimburg und die Freie Universität Bozen zu schaffen. Die Architektursprache des Neubaus ist eine einheitliche mit wenigen verschiedenen Materialien: der gegossene, sichtbar belassene Beton als Wand, Boden und Decke, viel Glas für die Fassade und Holzwerkstoffe für den Innenausbau. Das Tragwerk wird in Stahlbeton ausgeführt, bestehend aus Flachdecken, tragenden Stahlbetonwandscheiben und einer zweischaligen Außenhülle in Stahlbeton, welche dem eigentlichen Tragwerk vorgehängt wird. Durch die Abnahme des südseitigen Riegels von Osten nach Westen, von vier Geschosshöhen auf eine Geschosshöhe, wird der Eindruck des Schwebens des Bauwerkes vermittelt (Bild 1.1) . Das gesamte Gebäude wurde mit einer Kerndämmung mit monolithischer, oberflächenbearbeiteter Ortbetonfassade ausgerüstet.

Bild 1.1.: 3D Visualisierung des geplanten Gebäudes mit Blick auf die südseitige Fassade

Die südseitige Ortbetonfassade stellt den Hauptgegenstand dieser Arbeit dar. Die monolithische Ausführung der 64 m langen Fassade ist die Ursache für die hohen Zwangsspannungen innerhalb des Bauteils infolge Schwinden und Temperatureinwirkung. Die Lastübertragung zwischen tragender Struktur und gezwängter Fassade erfolgt dabei über 1 m lange beidseitig verankerte vertikale und horizontale Stahlbleche. Innerhalb der vorliegenden Diplomarbeit war es Aufgabe, die Positionen und

Anzahl dieser Bleche mithilfe einer Finite Elemente Modellierung soweit zu optimieren, dass die durch Zwangspannungen hervorgerufenen Rissbildungen auf einen Vorgabewert begrenzt werden. Für diese Optimierung wurde das nichtlineare Finite Elemente Programm ATENA herangezogen:

Die Arbeit gliedert sich daher in

- Grundlagen der nichtlinearen Finite Element Berechnungen
- Materialmodell innerhalb von FE-Programmen zur physikalisch nichtlinearen Berechnung von Beton im zweiachsialen Spannungszustand
- Fallstudie integrale Betonfassade
- Zuverlässigkeitsanalyse der Fassade

2. Finite-Element-Methode

Die Begrenzung der Rissbreiten der Fassade durch Anpassung der Befestigungsanordnung stellt ein Optimierungsproblem dar. Optimierungsprobleme von komplexen Tragwerken lassen sich durch Simulation mithilfe von Finite Element Programmen mit vertretbarem Aufwand lösen. Die nichtlineare Modellierung des Stahlbetons ermöglicht die Abschätzung der Rissbildung und der entwickelten Rissbilder. Für die richtige und effektive Nutzung der FE-Programme müssen die Grundlagen der FE-Methode verstanden werden. Die Definition von Eingabeparametern hat großen Einfluss auf die Richtigkeit und Qualität der erhaltenen Ergebnisse. Ebenfalls verlangt die Interpretation der Ergebnisse das Verständnis des Verfahrens. Die nachfolgenden Erläuterungen sollen das Näherungsverhalten der linearen und nichtlinearen Finite Element Methode aufzeigen. In der nichtlinearen FE-Methode soll der Iterationsablauf sowie die unterschiedlichen Anwendungsmöglichkeiten der verschiedenen Algorithmen dargestellt werden. Es folgt zunächst eine Einführung in die Grundlagen der linearen FE-Methode mit der Herleitung der linearen Elementmatrizen aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Danach erfolgt die Überleitung der Gleichgewichtsbedingung des diskreten Modells in eine linearisierte tangentiale Form und die Herleitung der tangentialen Elementsteifigkeitsmatrix. Anschließend werden die unterschiedlichen Pfadverfolgungsalgorithmen des Iterationszyklus der nichtlinearen Berechnung präsentiert.

Gegenstand der Theorie der Finiten Elemente ist die Abbildung des kontinuierlichen Tragwerkes auf das diskrete Modell. Das heißt, eine kontinuierliche Struktur wird in eine Anzahl endlich großer Teile, die finiten Elemente, aufgeteilt (RWTH, S. 26 f.). Diese einfachen Elemente lassen eine mathematische Formulierung des elastischen Verhaltens zu und ermöglichen somit die Berechnung von Systemen mit komplizierten statischen Tragverhalten als Summe dieser Elemente. Das Verfahren eignet sich deshalb besonders für Systeme, die mit den klassischen analytischen Verfahren der Mechanik nicht gelöst werden können. Die Lösungen des diskretisierten Modells stellen dabei immer nur Näherungslösungen des wirklichen Verhaltens dar, können aber im Fall von komplexen Systemen das wirkliche Verhalten von Tragwerken besser

beschreiben als Abschätzungen mit den klassischen Mitteln der Mechanik. Es wurden Elemente mit verschiedenen Freiheitsgraden in den Elementknoten entwickelt. Die Anwendung der unterschiedlichen Elemente wird dabei vom Tragwerkstyp, der Geometrie des Tragwerks oder der Lasteinwirkung bestimmt. Die nachfolgenden Erklärungen beziehen sich ausschließlich auf Elemente mit Verschiebungsansätzen.

2.1. Lineare diskrete Systeme

In linearen Systemen liegt ein proportionaler Zusammenhang zwischen den Lasten und den Verformungen vor. Zwei Arten linearen Verhaltens werden dabei unterschieden:

Geometrische Linearität: Das Gleichgewicht wird am unverformten System formuliert, das heißt, man setzt infinitesimale kleine Tragwerksverformungen voraus.

Physikalische Linearität: Es wird ein lineares Materialgesetz unterstellt.

Vorteile in der Annahme linearen Strukturverhaltens:

- Geringer numerischer Aufwand bei meistens ausreichender Genauigkeit.
- Die Anwendbarkeit des Superpositionsprinzips. Das Auffinden der maßgebenden Lastkombination kann durch Linearkombination der Einzellastfälle automatisiert werden (RWTH, S. 8).
- „Der Nachweis des Gesamttragwerks erfolgt durch lokale Nachweise kritischer Querschnitte“(RWTH, S. 8).

Wird das kontinuierliche Modell nun diskretisiert, so werden jedem Elementknoten die äußeren Kraftgrößen $\underline{P}$ und die gesuchten Verschiebungsgrößen $\underline{V}$ zu geordnet (Bild 2.1). Im Fall eines linearen Systems müssen beide Vektoren über ein lineares Gleichungssystem verbunden sein. Das lineare Gleichungssystem stellt dabei die Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$ des Systems dar, da sie als Produkt einer Verschiebungsgröße eine Kraftgröße ergibt:

$$\underline{K} \cdot \underline{V} = \underline{P}. \tag{2.1}$$

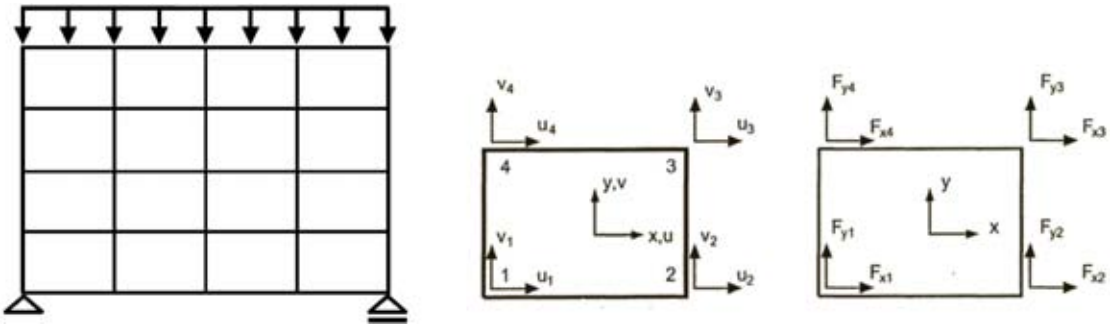

Bild 2.1.: Diskretisiertes Modell mit einem herausgeschnittenen Element (modifiziert aus: Werkle, 2008, S. 23)

Die Steifigkeitsmatrix enthält dabei Informationen über den Tragwerkstyp, die Topologie des Tragwerks, die Geometrie des Tragwerks, die Lagerungsbedingungen, die Querschnittseigenschaften, die Materialdaten sowie die mechanische Modellbildung (RWTH, S. 26 f.). Ziel der Finite-Element-Methode ist nun die Herleitung dieser Steifigkeitsmatrix. Da die Struktur in Elemente unterteilt wurde, stellt auch die Steifigkeitsmatrix eine Zusammensetzung der Elementsteifigkeitsmatrizen dar. Ausschlaggebend ist daher die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrix $\underline{k}$ als Teil der Systemsteifigkeitsmatrix.

2.1.1. Herleitung der linearen Elementmatrizen

Die Herleitung der linearen Elementmatrizen folgt dem Skriptum der RWTH-Aachen (S. 27 f.).

Bei Elementen mit Verschiebungsansätzen stellt das Prinzip der virtuellen Kräfte den Ausgangspunkt der Herleitung dar:

$$\delta\Pi = -\int_V \delta\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV + \delta\underline{u}^T \underline{p} dV + RT = 0. \tag{2.2}$$

mit $\delta\Pi$ =virtuelle Arbeit; $\delta\underline{\varepsilon}$ =virtuelle Dehnungsvektor; $\underline{\sigma}$ =Spannungsvektor; $\delta\underline{u}$ =virtuelles Verschiebungsfeld; $\underline{p}$ =Vektor der Volumskräfte; dV =Volumsdifferential; RT=Randterme

Im ersten Schritt erfolgt die Wahl der passenden Ansatzfunktion der Verschiebungsgrößen entsprechend:

$$\underline{u} = \underline{N_a}\underline{\alpha}. \tag{2.3}$$

mit $\underline{u}$ =Verschiebungsfeld $\underline{N_a}$ =Matrix der Ansatzfunktionen
$\underline{\alpha}$ =Koeffizienten der Ansatzfunktionen

Die generellen Verschiebungsfunktionen lassen sich durch die Knotenverschiebungen wie folgt ausdrücken:

$$\underline{u} = \underline{N}\underline{v}. \tag{2.4}$$

mit $\underline{N}$ =Matrix der Formfunktionen $\underline{v}$ =Verschiebungsvektor

Die Matrix der Formfunktionen $\underline{N}$ dient zur Berechnung der Verschiebungen im Elementinneren aus den Knotenverschiebungen. Die Verzerrungen lassen sich wie folgt aus den Knotenverschiebungen ermitteln:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{D_k}\underline{N}\underline{v} = \underline{B}\underline{v}. \tag{2.5}$$

mit $\underline{D_k}$ =Matrix der kinematischen Gleichungen

Die Anwendung des Materialgesetzes auf Gleichung (2.5) führt auf die Spannungen:

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{B}\underline{v} = \underline{D}\underline{\varepsilon}. \tag{2.6}$$

Das Einsetzen der Zustandsgrößen in (2.2) und die Vernachlässigung der Konstanten in den Randbedingungen führt zu:

$$-\delta\underline{v}^T \left\{ \int_V \underline{B}^T \underline{D}\underline{B} dV \underline{v} - \int_V \underline{N}^T \underline{p} dV \right\} = 0. \tag{2.7}$$

mit $\delta\underline{v}$ =virtuelle Verschiebungsvektor $\underline{B}$ =Verträglichkeitsmatrix
$\underline{D}$ =Werkstoffmatrix

Der Ausdruck in der Klammer:

$$\underline{k} = \int_V \underline{B}^T \underline{D}\underline{B} dV \tag{2.8}$$

wird als Elementsteifigkeitsmatrix bezeichnet
und der Ausdruck

$$\underline{q} = \int_V \underline{N}^T \underline{p} dV \tag{2.9}$$

stellt den Lastvektor eines Elementes dar. Die beiden Terme stehen über den Verschiebungsvektor in folgender Abhängigkeit:

$$\underline{k} \cdot \underline{v} = \underline{q}. \tag{2.10}$$

2.1.2. Allgemeines zum Näherungsverhalten von Finite Elemente Methoden

Der Näherungscharakter der Finiten Elemente mit Verschiebungsansätzen begründet sich aus der Annahme eines Verlaufs der Verschiebungsgrößen (Gleichung (2.3)). Mithilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen können, durch die getroffene Annahme, die Gleichgewichtsbedingungen nicht exakt erfüllt werden. Das PvV besitzt aber die Eigenschaft das Gleichgewicht „im Mittel“ einzuhalten (Werkle, 2008, S. 75). Das bedeutet, dass die resultierenden Spannungsverläufe gemittelte Werte der exakten Lösung darstellen. Elemente mit Verschiebungsansätze besitzen daher die folgenden Eigenschaften:

a) Verschiebungsgrößen stimmen an den Grenzen benachbarter Elemente überein.

b) Die Gleichgewichtsbedingungen für die Kraftgrößen werden an den Grenzlinien benachbarter Elemente nicht erfüllt, d. h., es tritt ein in Wirklichkeit nicht vorhandener Spannungs- bzw. Schnittgrößensprung auf.

c) Die Auflagerbedingungen (geometrische Randbedingungen) werden an gelagerten Rändern erfüllt.

d) An freien Rändern wird das Gleichgewicht zwischen Randlasten und Schnittgrößen (statische Randbedingungen) nicht erfüllt (Werkle, 2008, S. 169).

Ein weiterer Unterschied zur exakten Lösung liegt in der höheren Steifigkeit der Systemantwort. Die „gemittelten“ Verschiebungen der Elementknoten liegen daher stets unter den wahren Verschiebungen (Werkle, 2008, S. 188).

2.2. Nichtlineare diskrete Systeme

Will man das wirkliche Tragvermögen einer Struktur ermitteln oder brauchbare Ergebnisse für Systeme mit großen Verformungen erhalten, kommen nichtlineare Verfahren zur Anwendung. Bild 2.2 zeigt die Gesamtsteifigkeitsbeziehungen von linearen und nichtlinearen Strukturverhalten. Wie bei linearem Strukturverhalten unterschei-

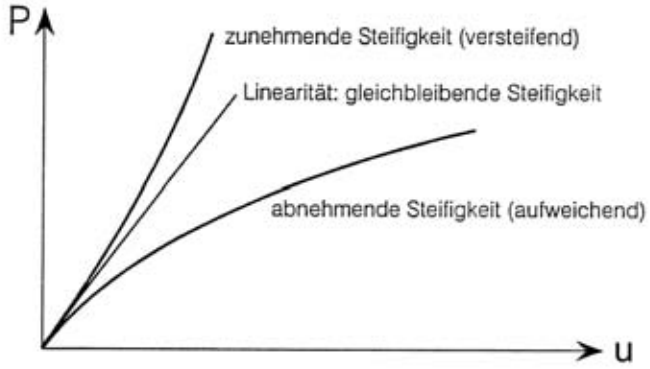

Bild 2.2.: Lastverschiebungsdiagramm; Vergleich der Systemsteifigkeiten von linearen und nichtlinearen Verhalten (aus: RWTH, S. 10)

det man auch hier zwischen **geometrischer Nichtlinearität** und **physikalischer Nichtlinearität**. Nichlineare kinematische Gleichungen und Materialgesetze verhindern dabei i.A. das explizite Lösen von Gleichung (2.1). $\underline{K} \cdot \underline{V}$ in Gleichung (2.1) entspricht der Summe der inneren Kräfte und kann auch als Vektor der Gleichgewichtsfunktionen $\underline{G}(\underline{V})$ formuliert werden. Man erhält dann

$$\underline{G}(\underline{V}) = \underline{P} \tag{2.11}$$

als Gleichgewicht zwischen den inneren Kräften und den äußeren Kräften. Da Schnittgrößen aus den Verschiebungen resultieren, lässt sich die Gleichgewichtsfunktion durch die Knotenverschiebungen ausdrücken. Im nichtlinearen Fall kann man das Kräftegleichgewicht nicht direkt lösen, es kann aber mittels bekannter Knotenver-

schiebungen kontrolliert werden. Dazu wird das Kräftegleichgewicht in diskreter Form angesetzt und die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung in eine linearisierte tangentiale Form überführt. Ein Gleichgewichtszustand wird daher erst durch iteratives Lösen von linearisierten Gleichungen erreicht. Wie in Bild 2.3 gezeigt, erfolgt die Lastaufbringung nicht in einem Schritt mit nur einem iterativ bestimmten Gleichgewichtszustand, sondern entspricht einem Lastprozess. Dabei werden die Lasten in Laststufen unterteilt und schrittweise auf das System aufgebracht. In jeder Iteration eines Iterationszyklus wird ausgehend von einem Grundzustand, mit bekannten Zustandsgrößen, der Nachbarzustand bestimmt siehe Bild 2.4. Jede Laststufe ist durch einen Gleichgewichtszustand und Iterationszyklus charakterisiert. Die Reihenfolge der Lastaufbringung hat Einfluss auf das Konvergenzverhalten und die gesamte Systemantwort, da das Superpositionsprinzip bei nichtlinearen Berechnungen seine Gültigkeit verliert, siehe hierzu auch (RWTH, S. 28 ff.).

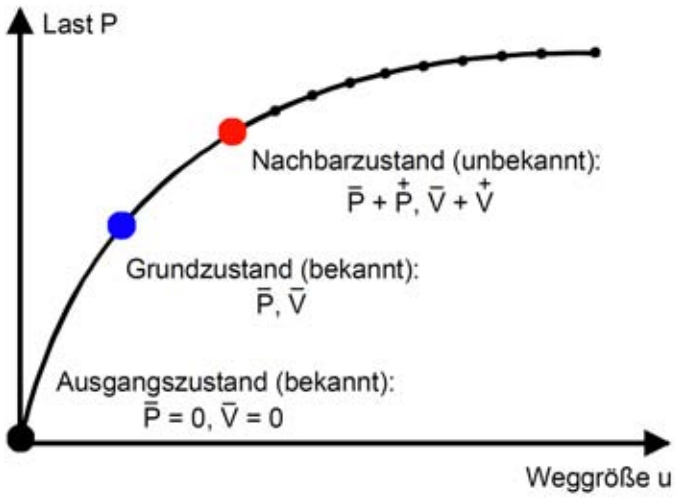

Bild 2.3.: Last-Verformungskurve eines nichtlinearen Systemverhaltens; iterative Anpassung der Systemsteifigkeit während des inkrementellen Lastprozesses (aus: RWTH, S. 34)

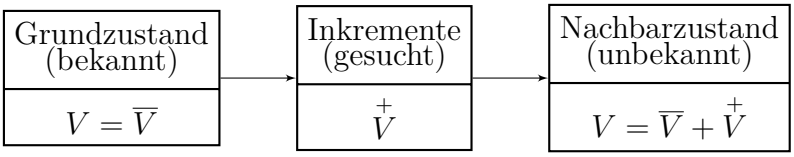

Bild 2.4.: Inkrementeller Lösungsprozess (nach: RWTH, S. 34)

2.2.1. Herleitung der tangentialen Gleichgewichtsbedingung

Die Herleitung der tangentialen Gleichgewichtsbedingung sowie die Herleitung der tangentialen Elementmatrizen lehnt sich an das Skriptum der RWTH-Aachen (S. 35 ff.) an.

Die inkrementelle Form des Gleichgewichts aus Gleichung (2.11) ergibt mit Einführung der Gleichgewichtszustände:

$$\underline{G}\left(\overline{\underline{V}} + \overset{+}{\underline{V}}\right) = \overline{\underline{P}} + \overset{+}{\underline{P}}. \tag{2.12}$$

Das Verschiebungsinkrement $\overset{+}{\underline{V}}$ wird i.Allg. durch eine lineare Taylorreihenentwicklung aus $\underline{G}\left(\overline{\underline{V}} + \overset{+}{\underline{V}}\right)$ bestimmt:

$$\underline{G}\left(\overline{\underline{V}} + \overset{+}{\underline{V}}\right) \approx \underline{G}\left(\overline{\underline{V}}\right) + \frac{\delta \underline{G}}{\delta \underline{V}} \cdot \overset{+}{\underline{V}} = \overline{\underline{P}} + \overset{+}{\underline{P}}. \tag{2.13}$$

Die Reihenentwicklung wird i. Allg. nach dem linearen Glied abgebrochen, wodurch ein Restfehler verbleibt. Diese Vorgehensweise entspricht dem NEWTON-Verfahren zur Berechnung von Nullstellen stetiger differenzierbarer Funktionen. Die bekannte Formel zur Nullstellensuche:

$$\Delta x = -\frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)} \tag{2.14}$$

entspricht der Taylorreihe von $f\left(x + \Delta x\right)$ mit Abbruch nach dem linearen Glied und Nullsetzen des Funktionswertes $f\left(x_0 + \Delta x\right) = 0$:

$$0 = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right) \Delta x. \tag{2.15}$$

Ersetzt man $f\left(x + \Delta x\right)$ durch $\underline{G}\left(\overline{\underline{V}} + \overset{+}{\underline{V}}\right) - \overline{\underline{P}} - \overset{+}{\underline{P}}$ erhält man Gleichung (2.13). Wobei $\underline{G}\left(\overline{\underline{V}}\right)$ dem Vektor der inneren Kräfte $\underline{F}_i\left(\overline{\underline{V}}\right)$ des Grundzustandes entspricht und $\frac{\delta \underline{G}}{\delta \underline{V}}$ die tangentiale Steifigkeitsmatrix $\underline{K}_T$ des Last-Verformungspfades darstellt.

Durch Umformung von Gleichung (2.13) erhält man die tangentiale Gleichgewichtsbedingung:

$$\underline{K}_T \cdot \overset{+}{\underline{V}} = \overline{\underline{P}} + \overset{+}{\underline{P}} - \underline{F}_i\left(\overline{\underline{V}}\right). \tag{2.16}$$

In der ersten Iteration einer Laststufe befindet sich der Grundzustand im Gleichgewicht und die inneren Kräfte $\underline{F}_i\left(\overline{\underline{V}}\right)$ entsprechen den äußeren Lasten $\overline{\underline{P}}$ des Grundzustandes. Wird nun das Lastinkrement $\overset{+}{\underline{P}}$ auf das System aufgebracht, kann mit Gleichung (2.17) das erste Verschiebungsinkrement berechnet werden:

$$\underline{K}_T \cdot \overset{+}{\underline{V}} = \overset{+}{\underline{P}}. \tag{2.17}$$

Ab der zweiten Iteration einer Laststufe wird kein neues Lastinkrement mehr aufgebracht, daher kann $\overset{+}{\underline{P}}$ in Gleichung (2.16) weggelassen werden. Durch den Abbruchfehler der Taylorreihenentwicklung stehen die inneren Kräfte und die äußeren Kräfte des neuen Grundzustandes nicht mehr im Gleichgewicht und die tangentiale Gleichgewichtsbedingung muss wie folgt aufgestellt werden:

$$\underline{K}_T \cdot \overset{+}{\underline{V}} = \overline{\underline{P}} - \underline{F}_i\left(\overline{\underline{V}}\right). \tag{2.18}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite in Gleichung (2.18) wird als Ungleichgewichtskraft bezeichnet. Bild 2.5 stellt den Iterationsablauf nach dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren grafisch dar. Diese Methode bzw. das modifizierte NEWTON-RAPHSON-Verfahren (abnehmende Konvergenzrate) wird bei nichtlinearen Berechnungen vielfach angewandt.

2.2.2. Herleitung der tangentialen Elementsteifigkeitsmatrizen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen im Nachbarzustand ist die Basis für die Herleitung der tangentialen Elementsteifigkeitsmatrizen bei nichtlinearen Systemen:

$$\delta\Pi = -\int_V \delta\underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV + \delta\underline{u}^T \underline{p} dV + RT = 0. \tag{2.19}$$

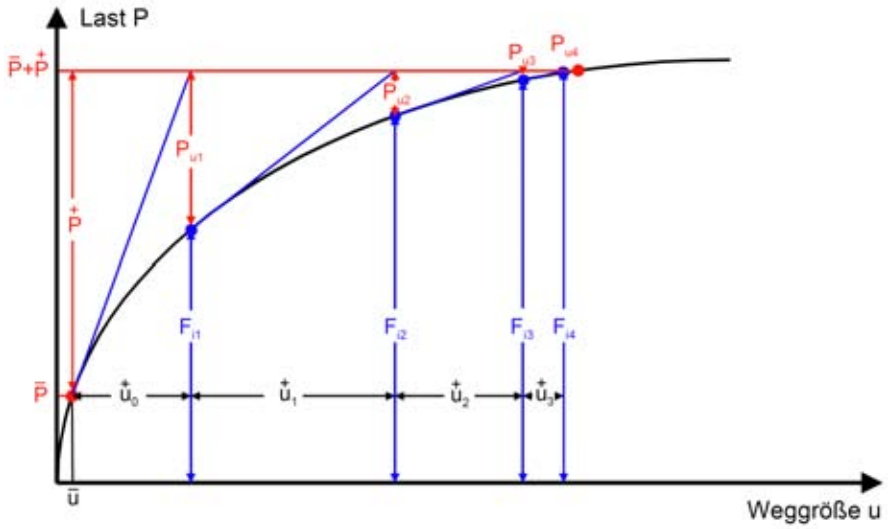

Bild 2.5.: Last-Verschiebungsdiagramm; Iterationsablauf des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens, (entnommen aus: RWTH, S. 36)

Bei der Anwendung des inkrementellen Prinzips auf das PvV werden die Variablen in (2.19) in eine inkrementelle Form übergeführt. Für die Verformungen ergibt sich:

$$\underline{u} = \overline{\underline{u}} + \overset{+}{\underline{u}}. \tag{2.20}$$

mit $\underline{u}$ =Verschiebungsfeld $\overline{\underline{u}}$ =Verschiebungsfeld des Grundzustandes
$\overset{+}{\underline{u}}$ =inkrementelles Verschiebungsfeld

Aufgrund der nichtlinearen kinematischen Gleichungen können die Dehnungen nicht explizit ermittelt werden. Es wird $\underline{\varepsilon}$ wie folgt in eine Taylorreihe entwickelt:

$$\varepsilon\left(\overline{\underline{u}} + \overset{+}{\underline{u}}\right) \approx \varepsilon\left(\overline{\underline{u}}\right) + \frac{d\underline{\varepsilon}}{d\underline{u}}\overset{+}{\underline{u}} + \frac{1}{2}\overset{+}{\underline{u}}^{T}\frac{d^2\underline{\varepsilon}}{d\underline{u}^2}\overset{+}{\underline{u}}. \tag{2.21}$$

Um eine spätere Diskretisierung des kontinuierlichen Modells vornehmen zu können, muss die Reihe nach dem quadratischen Glied abgebrochen werden. Terme höheren Grades können daher nicht innerhalb der Matrizenrechnung behandelt werden. Gleichung (2.21) kann vereinfacht als

$$\underline{\varepsilon} = \overline{\underline{\varepsilon}} + \overset{+}{\underline{\varepsilon}} + \overset{++}{\underline{\varepsilon}} \tag{2.22}$$

geschrieben werden. Die Anzahl der hochgestellten „+“ bezeichnet den Exponenten

von $\underline{u}$ im jeweiligen Term. Die Linearisierung des nichtlinearen Materialgesetzes mittels Taylorreihenentwicklung führt zu:

$$\underline{\sigma} \approx \overline{\underline{\sigma}} + \frac{d\underline{\sigma}}{d\underline{\varepsilon}} \overset{+}{\underline{\varepsilon}} = \overline{\underline{\sigma}} + D_T \overset{+}{\underline{\varepsilon}}. \tag{2.23}$$

mit $\underline{\sigma}$ =Spannungsvektor $\overline{\underline{\sigma}}$ =Spannungsvektor des Grundzustandes
D_T =tangentiale Werkstoffmatrix

Die Spannung des Grundzustandes $\underline{\sigma}$ wird durch Integration des inkrementellen Werkstoffgesetzes und auf Basis von $\overline{\underline{\varepsilon}}$ wie folgt bestimmt:

$$\underline{\sigma} = \int_0^{\overline{\varepsilon}} \underline{D}_T d\,\underline{\varepsilon}. \tag{2.24}$$

Die Inkrementierung der Last

$$\underline{p} = \overline{\underline{p}} + \Delta\underline{p} \tag{2.25}$$

mit $\underline{p}$ =Vektor der Volumskräfte $\overline{\underline{p}}$ =Grundzustandsvektor der Volumskräfte
$\Delta\underline{p}$ =inkrementeller Vektor der Volumskräfte

erlaubt die Überführung in Gleichung (2.19). Die Energieaussage lässt sich nach dem Einsetzen wie folgt anschreiben:

$$-\int_V \delta\overset{+}{\underline{\varepsilon}} \left(\overline{\underline{\sigma}} + \underline{D}_T \overset{+}{\underline{\varepsilon}}\right) dV - \int_V \delta\overset{++T}{\underline{\varepsilon}}\, \overline{\underline{\sigma}} dV + \int_V \delta\overset{+T}{\underline{u}} \left(\overline{\underline{p}} + \Delta\underline{p}\right) dV = 0. \tag{2.26}$$

Die virtuellen Größen in Gleichung (2.19) beziehen sich nur auf die variierbaren unbekannten Inkremente, die bekannten Größen des Grundzustandes gelten als unveränderlich:

$$\delta\underline{u} = \delta\overset{+}{\underline{u}}, \quad \delta\underline{\varepsilon} = \delta\overset{+}{\underline{\varepsilon}} + \delta\overset{++}{\underline{\varepsilon}}. \tag{2.27}$$

Terme welche nicht mehr quadratisch mit den Verschiebungselementen verknüpft sind, sondern von Verschiebungsinkrementen höherer Potenzen abhängen, sind in Gleichung(2.27) vernachlässigt worden. Diese Terme können wie die Restglieder der Taylorreihe in Gleichung (2.21) nicht in der Matrizenrechnung behandelt werden. Nachdem die schwache Form des Gleichgewichts linearisiert wurde, können die Va-

riablen in (2.27) durch die Knotenverschiebungen ausgedrückt werden. Die Verschiebungen können wie in Gleichung (2.4) mithilfe der Matrix der Formfunktionen $\underline{N}$ diskretisiert werden:

$$\overline{\underline{u}} = \underline{N}\overline{\underline{v}}, \quad \overset{+}{\underline{u}} = \underline{N}\overset{+}{\underline{v}}. \tag{2.28}$$

Die inkrementellen Größen in den Verzerrungen ergeben sich zu:

$$\overset{+}{\underline{\varepsilon}} = \overset{+}{\underline{B}}(\overline{\underline{u}})\overset{+}{\underline{v}}, \quad \overset{+}{\underline{v}}^T \overset{++}{\underline{B}}(\overline{\underline{u}})\overset{+}{\underline{v}}. \tag{2.29}$$

Die Verzerrungen des Grundzustandes müssen über die kinematische Gleichung $\overline{\underline{\varepsilon}}\,(\overline{\underline{u}})$ ausgewertet werden. Bei Anwendung des Materialgesetzes auf (2.29) lassen sich auch die inkrementellen Spannungen durch die inkrementellen Knotenfreiheitsgrade wie folgt ausdrücken:

$$\overset{+}{\underline{\sigma}} = \underline{D}_T \overset{+}{\underline{B}}(\overline{\underline{u}})\overset{+}{\underline{v}}. \tag{2.30}$$

In Gleichung (2.27) eingesetzt ergibt sich schließlich die Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} -\delta\overset{+}{\underline{v}}^T \Bigg\{ \int_V \overset{+}{\underline{B}}^T \overline{\underline{\sigma}}\, dV + \int_V \overset{+}{\underline{B}}^T \underline{D}_T \overset{+}{\underline{B}}\, dV \overset{+}{\underline{v}} + \int_V \left(\overset{++}{\underline{B}}^T + \overset{++}{\underline{B}} \right) \overline{\underline{\sigma}}\, dV \overset{+}{\underline{v}} \\ - \int_V N^T \left(\overline{\underline{p}} + \Delta\underline{p} \right)\, dV \Bigg\} = 0 \end{aligned} \tag{2.31}$$

welche für die Lösung nach Gleichung (2.16) Anwendung findet. Für Gleichung (2.31) lassen sich folgende Terme definieren:

Nichtlineare Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_{nl}$:

$$\underline{k}_{nl} = \int_V \overset{+}{\underline{B}}^T \underline{D}_T \overset{+}{\underline{B}}\, dV \tag{2.32}$$

Geometrische Steifigkeitsmatrix $\underline{k}_g$:

$$\underline{k}_g = \int_V \left(\overset{++}{\underline{B}}^T + \overset{++}{\underline{B}} \right) \overline{\underline{\sigma}}\, dV \tag{2.33}$$

Vektor der inneren Kräfte $\underline{\mathrm{f}}_i$:

$$\underline{\mathrm{f}}_i = \int_V \overset{+}{\underline{B}}^T \underline{\sigma}\, dV \tag{2.34}$$

Grundzustandslastvektor $\overline{\underline{q}}$:

$$\overline{\underline{q}} = \int_V N^T \overline{\underline{p}}\, dV \tag{2.35}$$

Lastinkrement $\Delta\underline{q}$:

$$\Delta\underline{q} = \int_V N^T \Delta\underline{p}\, dV \tag{2.36}$$

Folglich kann Gleichung (2.31) vereinfacht in folgender Form, welche der Gleichung (2.16) entspricht, dargestellt werden:

$$\left(\underline{k}_{nl} + \underline{k}_g\right) \overset{+}{\underline{v}} = \underline{k}_T \overset{+}{\underline{v}} = \overline{\underline{p}} + \Delta\underline{p} - \underline{\mathrm{f}}_i. \tag{2.37}$$

Diese Gleichung ist die Grundlage für den in Bild 2.6 gezeigten Iterationsablauf des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens für nichtlineare Berechnungen. Wird nur physikalische Nichtlinearität unterstellt, lässt sich der Iterationsablauf wie in Bild 2.7 gezeigt darstellen.

2.2.3. Referenzsysteme

In der Strukturmechanik verwendet man die LAGRANGEsche Formulierung als Bezugssystem. Der Verlauf der kinematischen und statischen Größen z.B. eines Partikels wird in Bezug auf einen Anfangszustand betrachtet.

Man unterscheidet:

Total LAGRANGEsche Bezugskonfiguration: Es werden alle Zustandsgrößen eines Partikels auf die Konfiguration des unbelasteten Systems, dem Ausgangszustand bezogen. Dabei bleibt das Bezugssystem innerhalb des Lastprozesses unverändert. Die Formulierung kinematischer Gleichungen für den Ausgangszustand stellt jedoch bei Systemen mit großen Verformungen ein Problem dar (siehe Bathe, 2002, S. 613 f.; RWTH, S. 41).

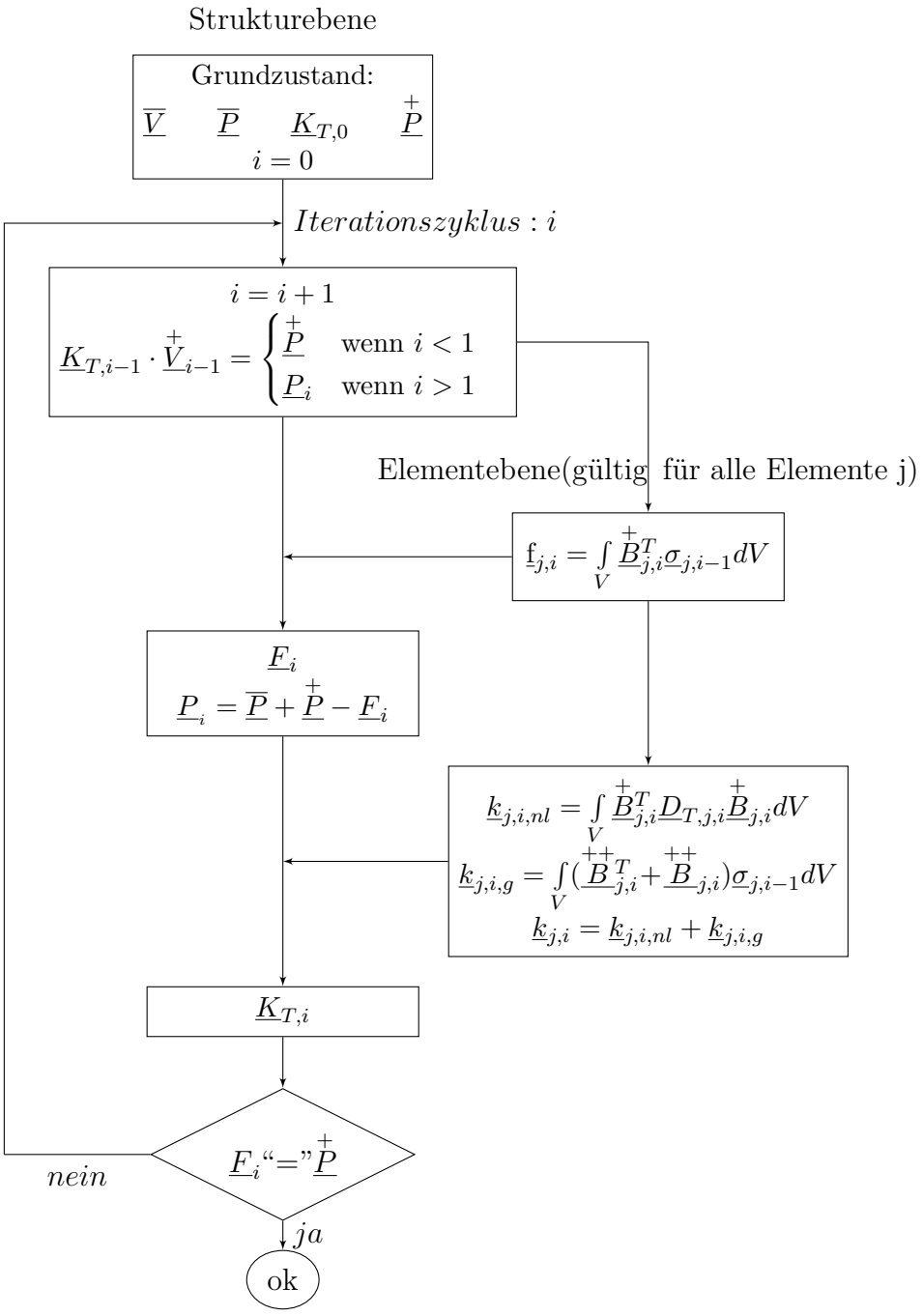

Bild 2.6.: Iterationsablauf innerhalb eines Inkrementes nach dem N.-R.-Verfahren

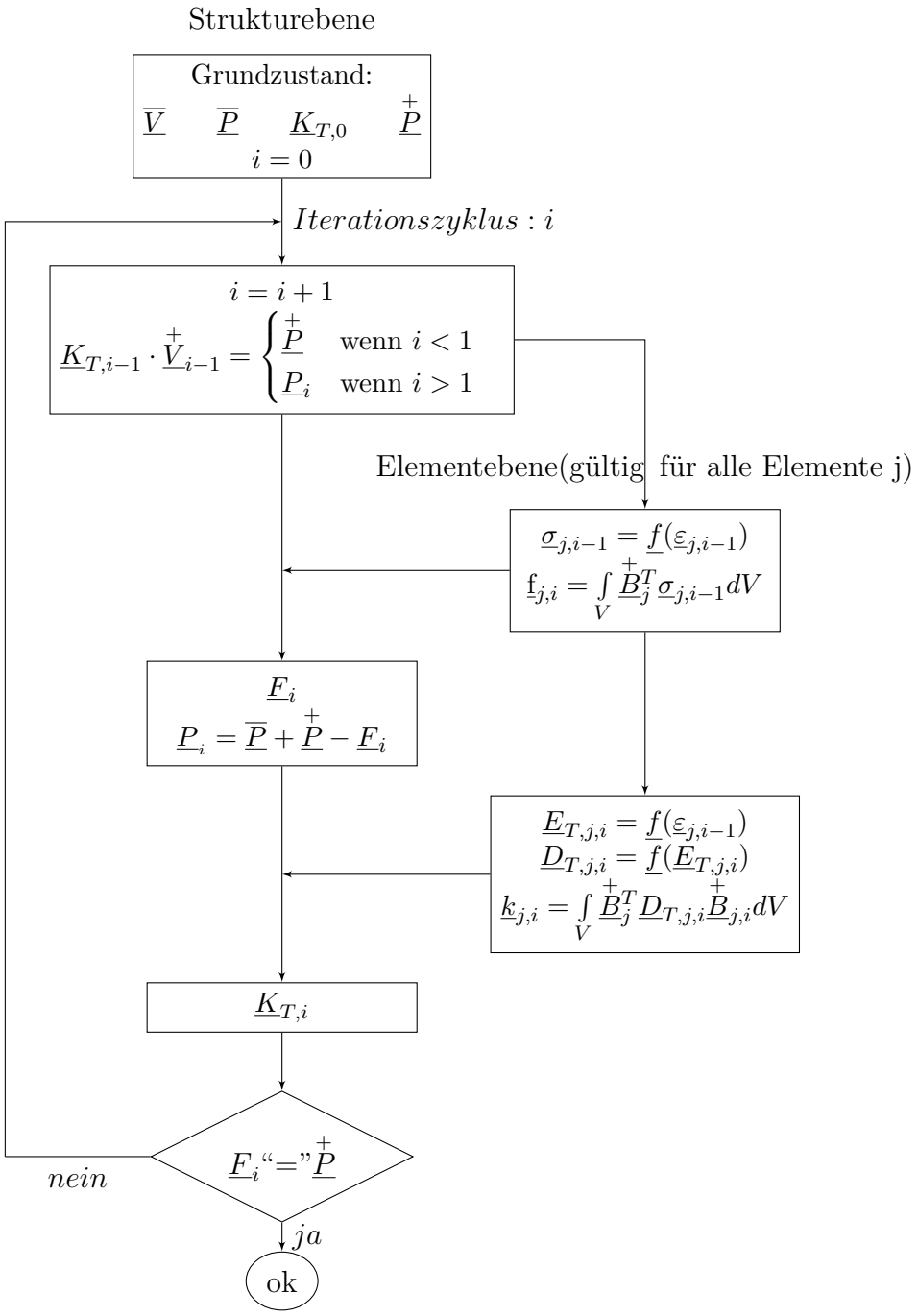

Bild 2.7.: Iterationsablauf bei nichtlinearen Materialverhalten innerhalb eines Inkrementes nach dem N.-R.-Verfahren

Updated LAGRANGEsche Bezugskonfiguration: Jedem Zustand des Kraft-Verformungspfades wird ein unterschiedliches Referenzsystem zugeordnet. Die Bezugssyteme haben unterschiedliche Geometrien und besitzen, mit Ausnahme des Ausgangszustandes, Spannungen und Dehnungen. Bei Wahl einer kleinen Lastschrittweite können die kinematischen Gleichungen vereinfacht angesetzt werden und Systeme mit großen Verformungen einfacher gelöst werden (siehe Bathe, 2002, S. 613 f.; RWTH, S. 41).

2.2.4. Pfadverfolgungsalgorithmen

In den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 wurde der Iterationsprozess von nichtlinearen Systemverhalten mithilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens beschrieben. In diesem Abschnitt werden weitere Algorithmen vorgestellt und deren Vor-und Nachteile näher erläutert. Mithilfe der Pfadverfolgungsalgorithmen lässt sich die Gesamtsteifigkeitsbeziehung als Systemantwort der Lastgeschichte, die sich wie folgt zusammensetzt

$$\underline{P} = \lambda_1 \cdot \underline{P}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{P}_2 + \cdots + \lambda_n \cdot \underline{P}_n \tag{2.38}$$

inkrementell berechnen. Innerhalb der Lastgeschichte werden die Lasten nacheinander auf das System aufgebracht und nur jeweils die aktuelle Last $\underline{P}_i$ mit dem Lastfaktor λ_i gesteigert. Die Darstellungen in den nachfolgenden Bildern beziehen sich auf ein einparametrisches Lastsystem:

$$\underline{P} = \lambda \cdot \underline{P}. \tag{2.39}$$

Die Wahl des richtigen Algorithmus hängt u.a von der Problemstellung sowie der benötigten Rechenzeit bei vorgegebener Genauigkeit ab. Wobei mit steigender Genauigkeit auch die Rechenzeit anwächst. Die Effizienz einer Rechnung wird daher wesentlich von der gewählten Genauigkeit bestimmt. Ein Maß für die Genauigkeit stellt das Abbruchkriterium ϵ als Verhältnis zwischen iterativer Norm Z_{it} und Referenznorm Z_{ref} dar. Zur Anwendung kommen entweder Vektornormen oder Energienormen. Die Vektornorm entspricht der Länge des Vektors:

$$Z = \sqrt{\underline{V}^T \cdot \underline{V}} \tag{2.40}$$

während die Energienorm die geleisteten Arbeit zweier Vektoren darstellt:

$$Z = \underline{V}^T \cdot \underline{P}. \tag{2.41}$$

Festgelegt wird die Genauigkeit durch die Wahl einer Genauigkeitsschranke ϵ_{tol}:

$$\epsilon = \frac{Z_{it}}{Z_{ref}} \leq \epsilon_{tol}. \tag{2.42}$$

Innerhalb der Vektornormen werden Kraft-und Verschiebungsnormen unterschieden. Probleme dieser Normen sind die unterschiedlichen Einheiten der einzelnen Komponenten, welche in die Vektorlänge mit unterschiedlicher Gewichtung eingehen. Die iterative Norm wird im Fall der Vektornorm aus den Verschiebungsinkrementen oder den Ungleichgewichtskräften gebildet und im Fall der Energienorm aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren. Die Bezugsgrößen können sich auf den Ausgangszustand beziehen und stellen damit Gesamtlasten, Gesamtverschiebungen und die gesamte geleistete Arbeit dar oder sie sind einem Lastinkrement zugeordnet. Verwendet man den Gesamtzustand als Bezug nimmt die Genauigkeit mit fortschreitender Berechnung ab. Im Fall der inkrementellen Bezugsgrößen hängt die Genauigkeit von der Größe des gewählten Lastinkrementes ab. Nähere Details sind in Bathe (2002, S. 909 ff.) und RWTH (S. 56. f) nachzulesen.

NEWTON-RAPHSON-Verfahren Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren wurde bereits in der Herleitung des tangentialen Gleichgewichts skizziert. Die Iterationen entsprechen dabei einer Folge linearer Gleichungssysteme zur Näherung des Gleichgewichtszustandes auf einem bestimmten Lastniveau (Bild 2.8). Liegt das Lastniveau der Kraftsteuerung über der Extremstelle des Last-Verformungsdiagramms, kann der Gleichgewichtszustand nicht mehr erreicht werden und das Verfahren versagt. Dafür erhält man die mechanischen und kinematischen Größen für eine genau definierte Last. Das Verfahren eignet sich deshalb besonders für Bemessungszwecke. Weiters wird die Steifigkeit des Systems nach jeder Iteration neu berechnet und sorgt dadurch für ein quadratisches Konvergenzverhalten des Algorithmus (siehe hierzu Bathe, 2002, S. 897 ff.; RWTH, S. 58).

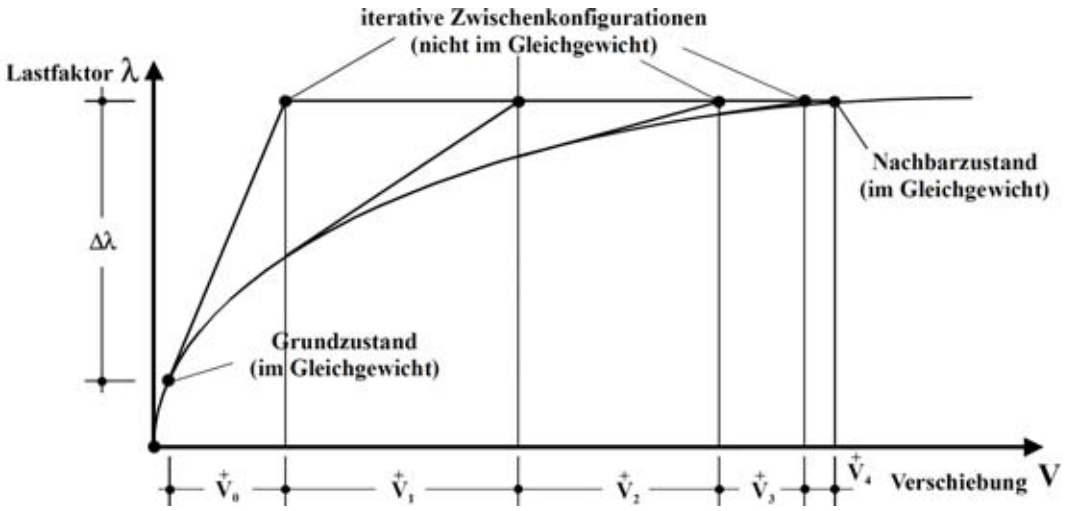

Bild 2.8.: Last-Verschiebungsdiagramm; NEWTON-RAPHSON-Verfahren (aus: RWTH, S. 58)

modifiziertes NEWTON-RAPHSON-Verfahren Bei dem modifizierten Verfahren wird die zusammengestellte Steifigkeitsmatrix der ersten Iteration zur Lösung aller weiteren linearen Gleichungssysteme verwendet (Bild 2.9). Zur Lösung des tangentialen Gleichgewichts müssen daher nur die Ungleichgewichtskräfte berechnet werden, wodurch der Rechenaufwand in den einzelnen Schritten deutlich sinkt. Der Nachteil des Verfahrens liegt in der abnehmenden Konvergenzrate, da die konstant gehaltene Steifigkeit mit fortschreitender Berechnung immer mehr von der tangentialen Steifigkeit abweicht. Der Aufwand durch die größere Anzahl an Rechenschritten muss daher durch kürzere Rechenzeiten in den einzelnen Iterationen kompensiert werden. Der Aufwand zur Berechnung der Ungleichgewichtskräfte, welcher wiederum von der verwendeten Elementformulierung abhängt, ist somit ein wesentliches Kriterium für die Wahl des Algorithmus (vgl. Bathe, 2002, S. 901; RWTH, S. 58 f.).

Bogenlängenverfahren Bogenlängenverfahren ermöglichen das Überwinden von Extremstellen und somit die weitere Verfolgung des Last-Verformungspfades. Ausgangspunkt der Iteration ist wie beim NEWTON-RAPHSON-Verfahren ein linearer Prediktorschritt mit einem vorgegebenen Lastschritt. Danach erfolgen die Iterationen aber nicht auf konstanten Lastniveau, sondern entlang einer Kurve oder Normalen zur tangentialen Steifigkeit des Prediktorschrittes (Bild 2.10). Dadurch befindet sich der neue Gleichgewichtszustand unterhalb des festgelegten Lastniveaus, folglich

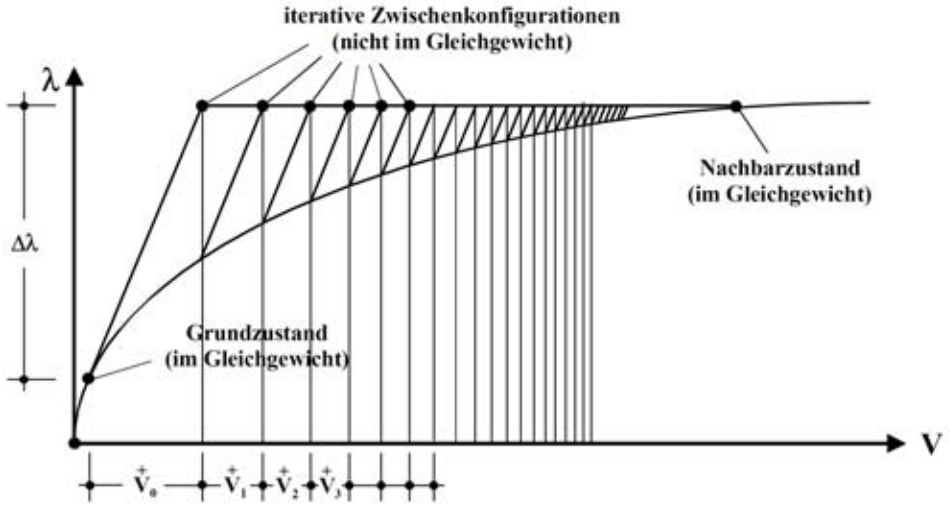

Bild 2.9.: Last-Verschiebungsdiagramm; modifiziertes NEWTON-RAPHSON-Verfahren (aus: RWTH, S. 59)

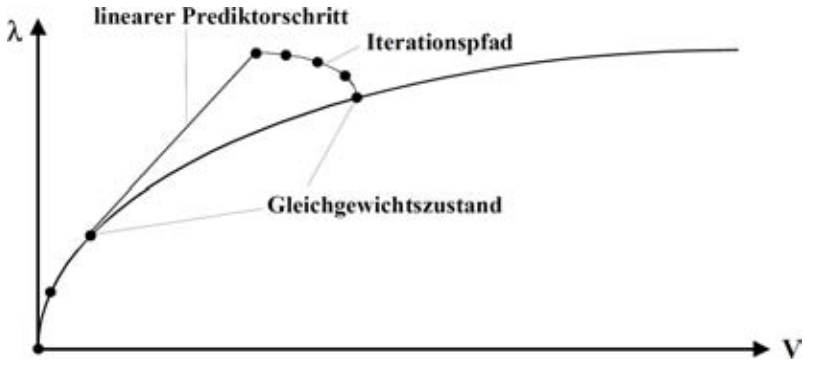

Bild 2.10.: Last-Verschiebungsdiagramm; Bogenlängenverfahren (aus: RWTH, S. 61)

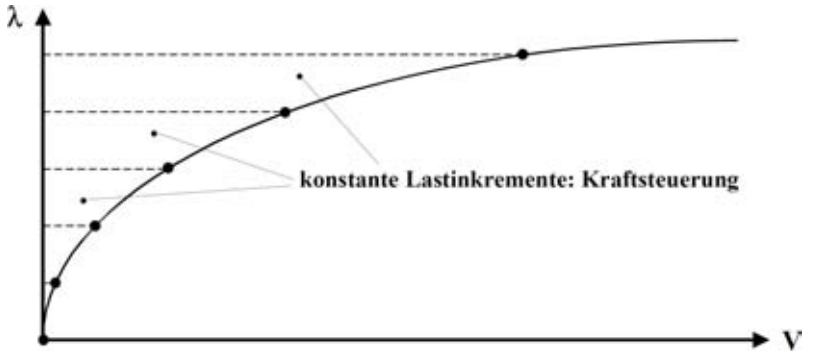

Bild 2.11.: Last-Verschiebungsdiagramm; Ungleichmäßige Inkrementierung des Last-Verformungspfades bei reiner Kraftsteuerung (aus: RWTH, S. 60)

erfolgt eine Iteration der Lasten. Der Vorteil liegt daher nicht nur im Überwinden von Extremstellen, sondern auch in der gleichmäßigen Unterteilung der Kurve. Für Verformungen in aufweichenden Systemen erhält man damit genauere Ergebnisse als mit der Kraftsteuerung, bei der das Verformungsinkrement unter konstant gehaltenen Lastschritten deutlich zunimmt (Bild 2.11). Durch die Änderung der festgelegten Laststufe ist das Verfahren dafür weniger für Bemessungszwecke geeignet (vgl. Bathe, 2002, S. 906 ff.; RWTH, S. 60 ff.).

3. Materialmodell für Beton im zweiachsialen Spannungszustand

Die Berechnungen der Stahlbetonfassade erfolgten unter Zugrundelegung eines zweiachsialen Spannungszustandes. Das Verhalten von Stahlbeton unter zweidimensionaler Beanspruchung wird in FE-Programmen mithilfe von konstitutiven Modellen beschrieben. Diese Modelle beschreiben die Anpassung der Werkstoffmatrix in den Iterationsschritten einer physikalisch nichtlinearen FE-Berechnung im ebenen Spannungszustand. Die nachfolgende Darstellung orientiert sich am Materialmodell SBeta 2D, welches im Programmpaket ATHENA 2D (Červenka u. a., 2010, S. 23 ff.) implementiert wurde sowie den Beschreibungen in Werkle (2008, S. 527 ff.) entspricht. Hier erfolgt die Ermittlung der gesuchten Materialparameter über äquivalente einachsiale Spannungs-Dehnungsbeziehungen, welche den ebenen Spannungszustand berücksichtigen.

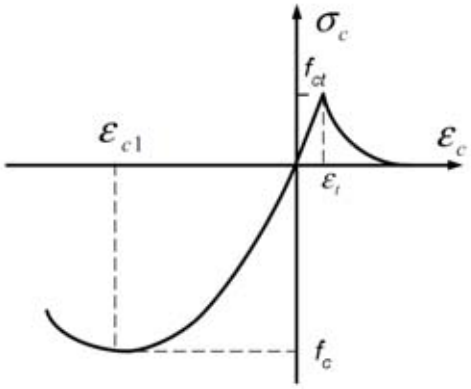

Bild 3.1.: Eindimensionales Materialgesetz von Beton (nach: Werkle, 2008, S. 521)

Stahlbeton als Verbundwerkstoff zwischen Beton und Stahl besitzt nichtlineares Materialverhalten. Ursachen der Nichtlinearität liegen in der geringen Zugfestigkeit sowie dem nichtlinearen Materialgesetz im Druckbereich von Beton (Bild 3.1). In inkrementeller Form lässt sich das Materialgesetz durch:

$$\underline{\sigma} \approx \overline{\underline{\sigma}} + \frac{d\underline{\sigma}}{d\underline{\varepsilon}} \overset{+}{\underline{\varepsilon}} = \overline{\underline{\sigma}} + D_T \overset{+}{\underline{\varepsilon}} \tag{3.1}$$

anschreiben. Wobei sich die Werkstoffmatrix D_T im Fall von Stahlbeton aus den beiden Komponenten:

$$D_T = D_{T,c} + D_{T,s} \tag{3.2}$$

zusammensetzt. Wird geometrische Linearität vorausgesetzt ergibt sich die tangentialen Steifigkeitsmatrix eines Finiten-Elementes j aus:

$$k_j = \int_V \overset{+}{\underline{B}}_j^T \underline{D}_{T,j} \overset{+}{\underline{B}}_j dV. \tag{3.3}$$

Die Ungleichgewichtskräfte des Elements lassen sich mit den bisher geleisteten Verschiebungen über eine Steifigkeit:

$$k_j = \int_V \overset{+}{\underline{B}}_j^T \underline{D}_{S,j} \overset{+}{\underline{B}}_j dV. \tag{3.4}$$

verknüpfen. Um die Verschiebungskorrekturen des Systems mittels der tangentialen Steifigkeit aufgrund der Ungleichgewichtskräfte zu berechnen, müssen die Werkstoffmatrizen der Elemente D_T und D_S in jedem Schritt der Iteration angepasst werden.

SBeta beschreibt ein nichtlineares elastisches Materialgesetz im zweidimensionalen Spannungszustand. Die gesuchten Parameter der Werkstoffmatrizen werden dabei aus einer äquivalenten einachsialen Spannungs-Dehnungsbeziehung gewonnen. Innerhalb der Ermittlung der Werkstoffmatrizen eines Elementes muss unterschieden werden, ob sich der Beton im ungerissenen Zustand oder gerissenen Zustand befindet. Weiters muss unterschieden werden, welches Konzept der Rissrichtung im gerissenen Zustand verwendet wird.

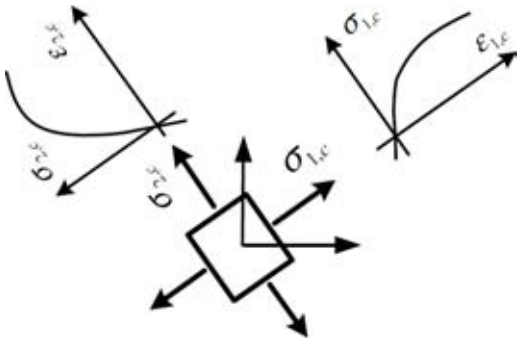

Bild 3.2.: Spannungs-Dehnungs-Linien in den Hauptrichtungen
(aus: Werkle, 2008, S. 529)

3.1. Ermittlung der Werkstoffmatrizen im ungerissenen Zustand

Bei *Beton* im ungerissenen Zustand ist jeder Hauptspannungsrichtung eine Spannungs-Dehnungsbeziehung zugeordnet, welche zur Berechnung der Materialparameter dient (Bild 3.2). Das gesuchte Materialgesetz in den Hauptspannungsrichtungen ist daher orthotrop und wird wie folgt dargestellt:

$$\underline{D}_{j,12,c} = \frac{1}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} E_{j,1} & \mu\sqrt{E_{j,1}E_{j,2}} & 0 \\ \mu\sqrt{E_{j,1}E_{j,2}} & E_{j,2} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu^2)G \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Die Einflüsse von Querzug beziehungsweise Querdruck auf die jeweilige Hauptspannung wird in den beiden Betonfestigkeiten der Spannungs-Dehnungsbeziehung berücksichtigt (Bild 3.3). Die Festigkeiten lassen sich in Abhängigkeit von dem Verhältnis $\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ aus der biaxialen Versagenskurve berechnen. Die Spannungen σ_1 und σ_2 stellen die geschätzten Hauptspannungen:

$$\underline{\sigma}_{j,12,c} = \overline{\underline{\sigma}}_{j,12,c} + \underline{T} D_{T,j,c} \overset{+}{\underline{\varepsilon}} \tag{3.6}$$

dar. Die Spannungs-Dehnungsbeziehungen entsprechen einachsialen Materialgesetzen mit angepassten Festigkeiten zur Berücksichtigung der Querspannung (Bild 3.3). Da die Hauptdehnungen aufgrund der Querdehnung nicht einachsial vergleichbar sind, werden sie in sogenannte äquivalente einachsiale Dehnungen transformiert. Das Materialgesetz wird daher als äquivalente Spannungs-Dehnungsbeziehung bezeichnet (Werkle, 2008, S. 528 f.).

Mit Hilfe der modifizierten Spannungs-Dehnungsbeziehung können in weiterer folge die gesuchten E-Module und die zugehörigen Schubmodule der Werkstoffmatrix berechnet werden. Der Tangenten Modul $E_{T,j,c}$ wird innerhalb der tangentialen Steifigkeitsmatrix zur Ermittlung der Verformungskorrekturen verwendet, während der Sekanten Modul:

$$E_{S,j,c} = \frac{\sigma_{j,c}}{\varepsilon^{eq}} \tag{3.7}$$

zur Berechnung der Ungleichgewichtskräfte dient.

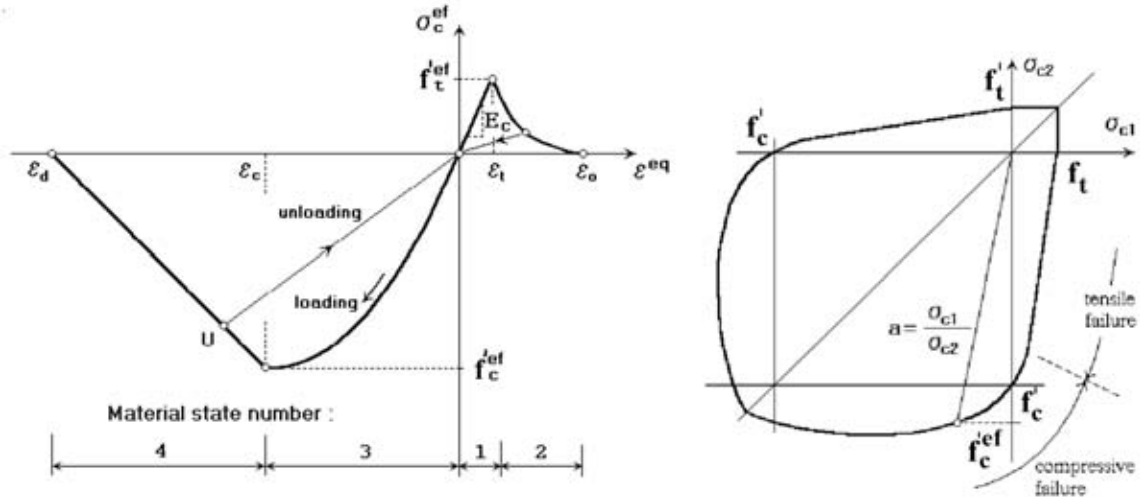

Bild 3.3.: äquivalente Spannungs-Dehnungsbeziehung und biaxiale Versagenskurve (aus: Červenka u. a., 2010, S. 26 und S.34)

Der Spannungszustand der *verschmierten Bewehrung* ist einaxial. Die Werkstoffmatrix hängt nur von dem E-Modul in Bewehrungsrichtung und dem Bewehrungsgrad ρ ab. Der Bewehrungsgrad dient zum Ermitteln einer äquivalenten Elementdicke, die der Bewehrung zu geordnet werden kann. Das Verhalten der Bewehrung kann durch ein linear elastisch-plastisches Materialgesetz (Bild 3.4) oder durch ein multilineares Materialgesetz in ATENA 2D beschrieben werden (Červenka u. a., 2010, S. 74 f.).

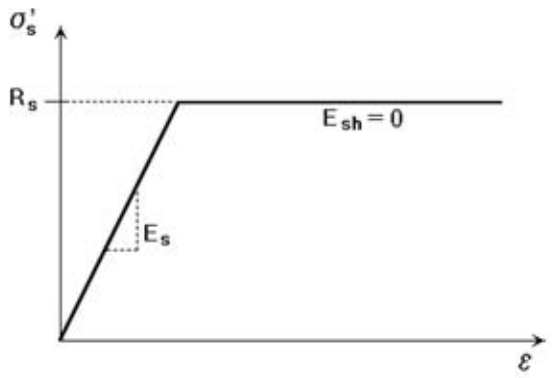

Bild 3.4.: linear elastisch-plastisches Materialgesetz (aus: Červenka u. a., 2010, S. 75)

Innerhalb des inkrementellen Lösungsprozesses lassen sich die Abläufe zur Ermittlung der Werkstoffmatrizen durch Bild 3.5 darstellen.

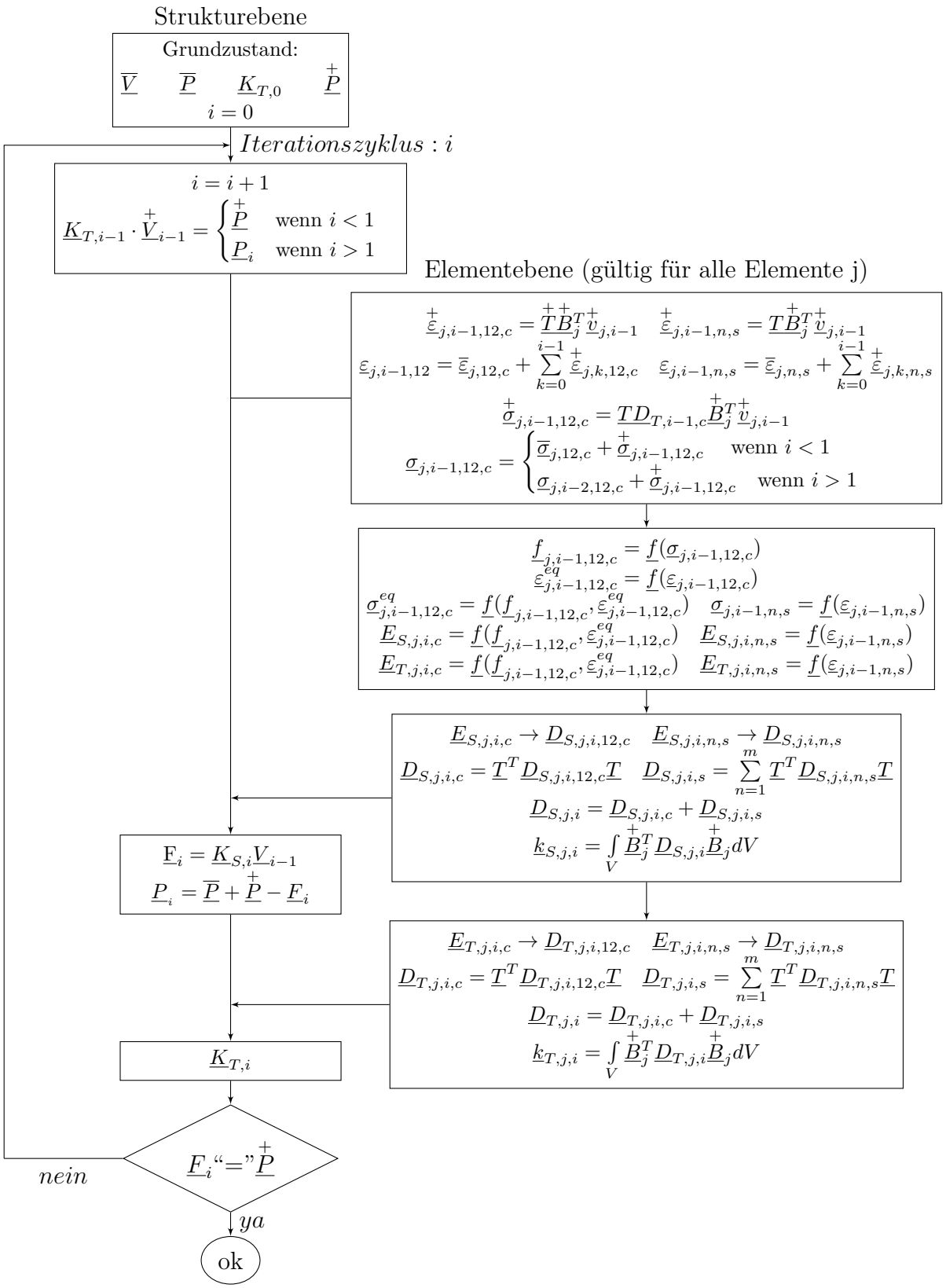

Bild 3.5.: Iterationsablauf innerhalb eines Lastinkrementes von Stahlbeton im zweidimensionalen Spannungszustand nach dem N.-R.- Verfahren

Aus Bild 3.5 lassen sich die Schritte zur Ermittlung der Ungleichgewichtskräfte und der tangentialen Steifigkeitsmatrix wie folgt anschreiben:

1. Berechnung der aktuellen Hauptdehnungen in den Elementknoten als Summe der Hauptdehnungsinkremente und der Hauptdehnung des Grundzustandes. Es werden dabei Dehnungen unterschiedlicher Hauptrichtungen aufsummiert.

2. Berechnung der approximierten Hauptspannungen in den Elementknoten mithilfe der transformierten tangentialen Werkstoffmatrix des letzten Schrittes.

3. Ermittlung der Betonfestigkeiten in den Hauptspannungsrichtungen aus der biaxialen Versagenskurve.

4. Ermittlung der äquivalenten Dehnungen in den Hauptdehnungsrichtungen.

5. Ermittlung der Tangenten-und Sekanten-Module aus der äquivalenten einachsialen Spannungs-Dehnungsbeziehung.

6. Mittelung der E-Module in den Elementknoten für beide Hauptrichtungen

7. Berechnung der zugehörigen Querdehnzahlen und Schubmodule.

8. Bildung der Sekanten-Werkstoffmatrix.

9. Transformation der Sekanten-Werkstoffmatrix auf die Elementkoordinaten.

10. Bildung der Sekanten-Steifigkeitsmatrix.

11. Berechnung der Ungleichgewichtskraft mithilfe der aktuellen Verschiebung.

12. Bildung der Tangenten-Werkstoffmatrix.

13. Transformation der Tangenten-Werkstoffmatrix auf die Elementkoordinaten.

14. Bildung der Tangenten-Steifigkeitsmatrix.

3.2. Ermittlung der Werkstoffmatrizen im gerissenen Zustand

Bei Überschreitung der Zugfestigkeit kommt es zur Rissbildung senkrecht zur Hauptspannungsrichtung des Betons. In diesem speziellen Materialgesetz kommt das Konzept der verschmierten Risse zur Anwendung. Nach der ersten Rissbildung werden daher Risse in Hauptspannungsrichtung und die damit verbundenen zusätzlichen Dehnungen als gleichmäßig verteilt angenommen. Die Zugversteifung der Bewehrung durch das gleichmäßige Mitwirken des Betons (tension stiffening effect) wird über das Materialmodell berücksichtigt. Die fiktiven Zugspannungen nach dem Erreichen der Zugfestigkeit sorgen dabei für eine gleichmäßige Rissverteilung zwischen den Elementen (Bild 3.6). G_f entspricht der Bruchenergie des Betons. Um einen Riss herum wird eine bestimmte Einheitsfläche definiert, die spannungsfrei ist.

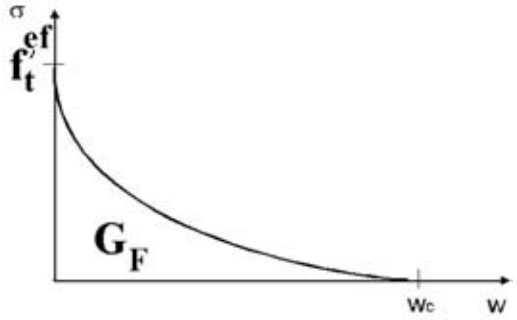

Bild 3.6.: Tension Softening innerhalb des äquivalenten einachsialen Materialgesetzes (aus: Červenka u. a., 2010, S. 28)

Je nachdem ob sich die Rissrichtung verändert oder gleich bleibt werden zwei verschiedene Konzepte unterschieden:

Beim *Konzept der festen Rissrichtung* bleibt die Richtung der Risse nach der Rissbildung konstant. Innerhalb der Werkstoffmatrix ist die schwache Materialachse m_1 senkrecht zur Rissrichtung und die starke Achse m_2 parallel dazu. Die Orthotropieachsen sind gleichbleibend und müssen nicht mit den Hauptspannungen übereinstimmen (Bild 3.7). Bei Änderung der Hauptspannungsrichtung können daher Schubspannungen im Riss auftreten.

Beim *Konzept der rotierenden Risse* entspricht die Rissrichtung immer der aktuellen Hauptspannungsrichtung. Damit sind auch die Orthotropieachsen der Werstoffmatrix mit den Hauptspannungsrichtungen identisch (Červenka u. a., 2010, S. 35 f.).

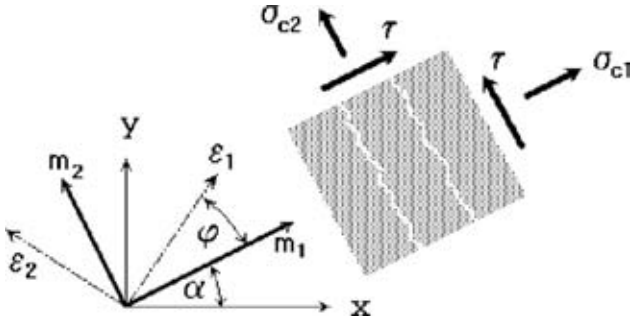

Bild 3.7.: Spannungs-Dehnungszustand im Modell mit fester Rissrichtung (aus: Červenka u. a., 2010, S. 36)

Werden im gerissen Zustand die Steifigkeitsmatrix und die Ungleichgewichtskräfte berechnet ergeben sich im Fall des Konzepts der festen Rissrichtung die folgenden Schritte:

1. Berechnung der aktuellen Dehnungen der Elementknoten normal zur Rissrichtung und in Rissrichtung. Aufsummiert werden die Dehnungen des Grundzustandes und die Dehnungsinkremente aller bisherigen Schritte. Befindet sich der Übergang vom ungerissenen Zustand zum gerissenen Zustand innerhalb des Iterationszyklus, so werden Hauptdehnungsinkremente und Dehnungsinkremente in den Materialachsen m_1 und m_2 summiert. Haben die Elemente bereits im Grundzustand Risse, so wird die Summe der Dehnungsinkremente in den Materialachsen gebildet.

2. Berechnung der approximierten Spannungen der Elementknoten in den Orthotropieachsen mithilfe der transformierten tangentialen Werkstoffmatrix des letzten Schrittes.

3. Ermittlung der Betonfestigkeiten in den Orthotropieachsen aus der biaxialen Versagenskurve. Die Druckfestigkeiten werden im gerissenen Zustand abgemindert.

4. Ermittlung der äquivalenten Dehnungen in den Richtungen der Materialachsen.

5. Ermittlung der Sekanten-Module aus der äquivalenten einachsialen Spannungs-Dehnungsbeziehung. Im Tension-Softening Bereich wird für den Tangenten-Modul ein Mindestwert angesetzt, da die Kurve in diesem Bereich abfallend ist.

6. Mittelung des E-Moduls in Rissrichtung und normal zur Rissrichtung.

7. Berechnung der zugehörigen Querdehnzahlen und Schubmodule.

8. Bildung der Sekanten-Werkstoffmatrix.

9. Transformation der Sekanten-Werkstoffmatrix auf die Elementkoordinaten.

10. Bildung der Sekanten-Steifigkeitsmatrix.

11. Berechnung der Ungleichgewichtskraft mithilfe der aktuellen Verschiebung.

12. Bildung der Tangenten-Werkstoffmatrix.

13. Transformation der Tangenten-Werkstoffmatrix auf die Elementkoordinaten.

14. Bildung der Tangenten-Steifigkeitsmatrix.

4. Fallstudie integrale Fassade

Durch die Verformungsbehinderung der 64 m langen Fassade ergeben sich große Zwangspannungen und Rissbildungen infolge Schwinden und Temperatureinwirkung. Die Zwangskräfte werden dabei von beidseitig verankerten Edelstahlblechen in die tragende Struktur eingeleitet. Die Anordnung dieser Bleche hat einen maßgeblichen Einfluss auf die Rissbildung und deren Verteilung innerhalb des Bauteils. Die vorgeschriebene Rissbreite und Verformung der Fassade lässt sich durch Optimierung der Blechanordnung einhalten. Die Anzahl der Bleche sollte aber auf ein Mindestmaß begrenzt werden, da die Edelstahlbleche einen wesentlichen Kostenfaktor darstellen. Ziel war eine optimierte Anordnung und Anzahl an Befestigungsmittel, welche die vorgeschriebene Rissbreite und Verformung einhält. Zunächst werden die Eingabeparameter der modellierten Fassade in ATENA 2D beschrieben, anschließend wird die Vorgehensweise bei der Optimierung der Befestigungsanordnung vorgestellt.

4.1. Eingabeparameter des Modells in ATENA 2D

4.1.1. Werkstoffe

Die folgenden Tabellen zeigen die Materialkennwerte der verwendeten Baustoffe der Stahlbetonfassade sowie der Befestigungsmittel zur tragenden Struktur. Die Parameter unter den Tabellen stellen zusätzliche Parameter des Materialmodells dar. Die verwendeten Teilsicherheitsbeiwerte der Widerstände (nach dm140108) werden im Anschluss an die Materialkennwerte aufgelistet.

Beton

Die Tabelle 4.1 zeigt die Materialkennwerte des verwendeten Betons. Die angegebenen Betonfestigkeiten dienen sowohl zur Ermittlung der Bemessungswerte im Grenzzustand der Tragfähigkeit sowie im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit. Die angegebene Bruchenergie dient zur Erfassung der Zugkapazität des Betons und zur Beschreibung des abfallenden Astes im äquivalenten einachsialen Materialgesetz nach Überschreitung der Zugfestigkeit.

Tabelle 4.1.: Materialkennwerte Beton

Betongüte C30/37		
f_{ck}	[MN/m^2]	-30
f^1_{ctm}	[MN/m^2]	2,9
f_{ck}	[MN/m^2]	2,0
μ	[−]	0,2
E	[MN/m^2]	2.8300
α_T	[K^{-1}]	1E-05

1)Für die Berechnung im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit wurde der Mittelwert der Betonzugfestigkeit verwendet. Die Betondruckfestigkeit sowie die Streckgrenze des Bewehrungsstahles entsprechen den charakteristischen Werten.

Bruchenergie G_f [MN/m^2]: 5.79E-05

Bewehrungsstahl

Die Bewehrung wurde in beiden Richtungen als verschmierte Bewehrung modelliert. Tabelle 4.2 zeigt die Materialkennwerte, darunter befindet sich der Bewehrungsgrad ρ der verschmierten Bewehrung.

Tabelle 4.2.: Materialkennwerte Bewehrungsstahl

Bewehrungsstahl B450C		
f_{yk}	[MN/m^2]	450
E	[MN/m^2]	200.000
α_T	[K^{-1}]	1E-05

Anfangsbewehrungsgehalt pro Richtung (ø14/100mm) [%]: 1,5
erhöhter Bewehrungsgehalt pro Richtung[1](ø14/100mm & ø14/200mm) [%]: 2,3

1) Da die Ableitung der vertikalen Kräfte nur an wenigen Stellen der Fassade möglich war, ergaben sich hohe Verformungen in den unbefestigten Bereichen. Um die maximal zulässige Verformung in vertikaler Richtung einzuhalten, musste der Bewehrungsgrad erhöht werden (siehe Bild 4.10).

Verbindungsstahlelemente

In Tabelle 4.3 sind die Materialkennwerte der Edelstahlbleche sowie der Kopfbolzen zur Verankerung der Bleche aufgelistet.

Tabelle 4.3.: Materialkennwerte Verbindungsstahlelemente

Edelstahl V4A	
f_{yk} [MN/m^2]	240
E [MN/m^2]	200.000
μ [−]	0,3
α_T [K^{-1}]	1,6E-05
γ [MN/m^3]	8E-02

Teilsicherheitsbeiwerte der Widerstände

Tabelle 4.4 zeigt die verwendeten Teilsicherheitsbeiwerte zur Ermittlung der Bemessungswerte der Widerstände (nach dm140108).

Tabelle 4.4.: Teilsicherheitsbeiwerte der Widerstände (nach dm140108)

		Grenzzustand der Tragfähigkeit	Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
Beton	γ_c	1,50	1,00
Betonstahl	γ_s	1,15	1,00
Stahl	γ_{M0}	1,10	1,00

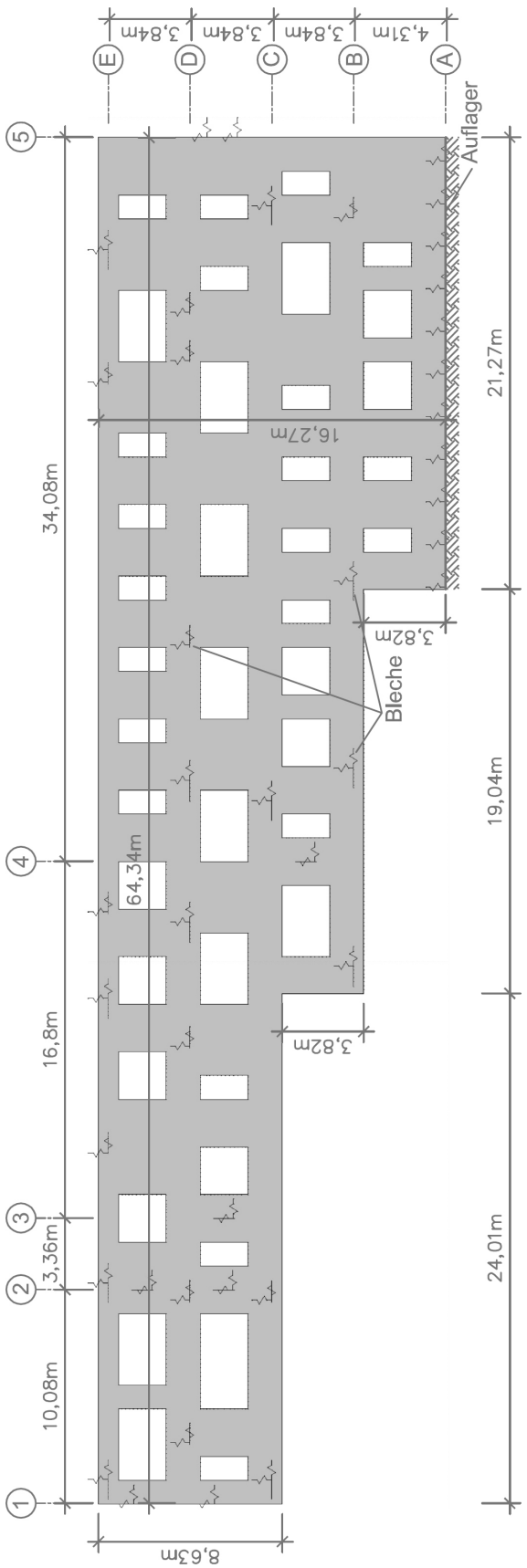

Bild 4.1.: Geometrie und Randbedingungen der Fassade

4.1.2. Topologie

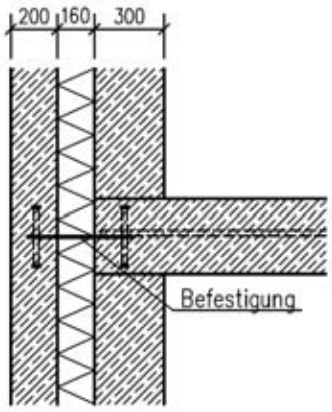

Bild 4.2.: Fassadenschnitt

Die monolithische Fassade ist Teil der zweischaligen Außenhülle des Neubaus, welche der tragenden Struktur vorgehängt ist (Bild 4.2). Die Fassade besitzt eine Länge von 64 m und eine Höhe von 16 m. Die durchschnittliche Größe der 41 Fensteröffnungen liegt bei $2,24\text{m} \times 2\text{m}$. Als Verbindungsmittel zwischen Fassade und tragender Struktur wurden 1 m lange Edelstahlbleche verwendet. Die Höhenlage der horizontalen Bleche wurde durch die Verankerung mit den dahinter liegenden Geschoßdecken vorgegeben. Ebenso stimmt die horizontale Lage der vertikalen Bleche mit der Lage der tragenden Wände überein. Die tragenden Wandscheiben und Geschoßdecken zur Verankerung der Befestigungsmittel sind in Bild 4.3 rot dargestellt. Im rechten unteren Teil der Fassade befindet sich die Gründung auf Erdgeschoßniveau. Sowohl die Bleche als auch die Gründung wurden in ATENA 2D als Linienfedern model-

Bild 4.3.: Befestigungsmöglichkeiten der Edelstahlbleche (rot)

liert. Die Netzweite der Finite-Elemente entspricht der Fassadendicke von 20 cm, um ausreichende Genauigkeit zu erreichen. Bild 4.1 zeigt die Geometrie sowie die Randbedingungen der modellierten Fassade.

4.1.3. Randbedingungen

Stahlbleche

Die Lastübertragung zwischen Fassade und der tragenden Struktur erfolgt über ein 12 mm dickes Stahlblech welches über Kopfbolzen und einer Anschlussbewehrung verankert wird (Bild 4.4). Maßgebend war die Idealisierung der Blechanschlüsse in Längsrichtung als Linienfedern und nicht als unverschiebliche Lagerungen aufgrund der teils großen rechnerischen Abweichungen. Zur Ermittlung der Steifigkeiten in Längsrichtung sowie in Querrichtung wurde das Blech in ATENA 2D als Kragträger modelliert (Bild 4.5). Auf jedem Knoten des freien Endes wurde eine Zwangsverschiebung mit einer Schrittweite von 0,1 mm aufgebracht und anschließend in jedem Schritt die berechneten Knotenreaktionskräfte F_i summiert. Aufgrund der schnellen Konvergenz der rechnerischen Kraftsumme zur wahren Kraftsumme, bei steigender Elementanzahl, wurden die Zwangsverschiebungen mit einer Netzweite von 5 cm berechnet. Mit der gleichmäßigen Knotenverschiebung Δw an der Außenkante des Bleches (Bild 4.6) und den dazugehörigen Knotenreaktionskräften F_i (Bild 4.7) wurde die Steifigkeit wie folgt

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{\Delta w} \tag{4.1}$$

errechnet. Bild 4.8 und Bild 4.9 zeigen die gemittelten Steifigkeiten als Steigung der Regressionsgeraden der Last-Verformungspaare von vier Laststufen. Zur Überprüfung wurde die Steifigkeit mit dem Ansatz (aus: Schnell u. a., 1995, S. 130)

$$k = \frac{w}{\frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{GA}} \tag{4.2}$$

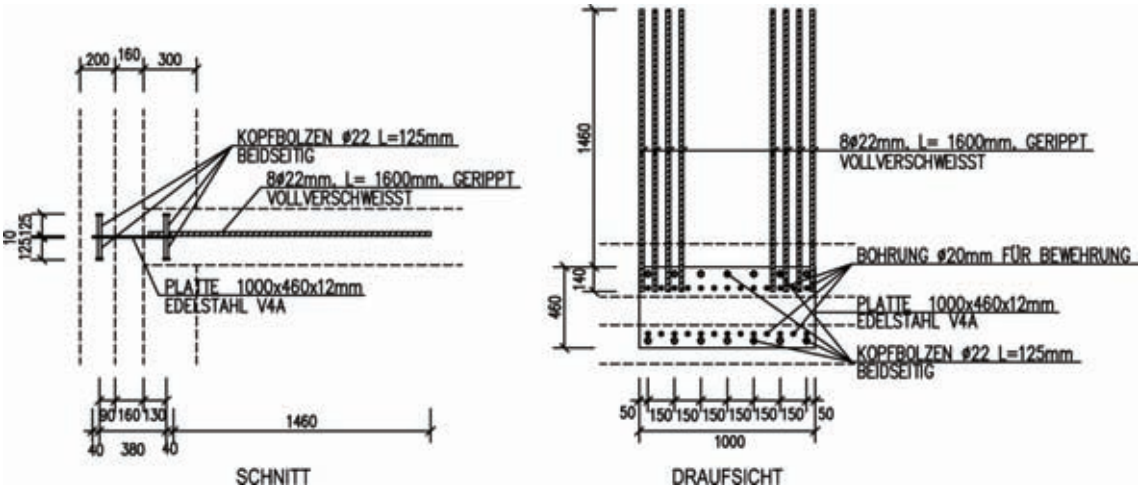

Bild 4.4.: Verankerung der Befestigungsmittel zwischen Fassade und tragender Struktur

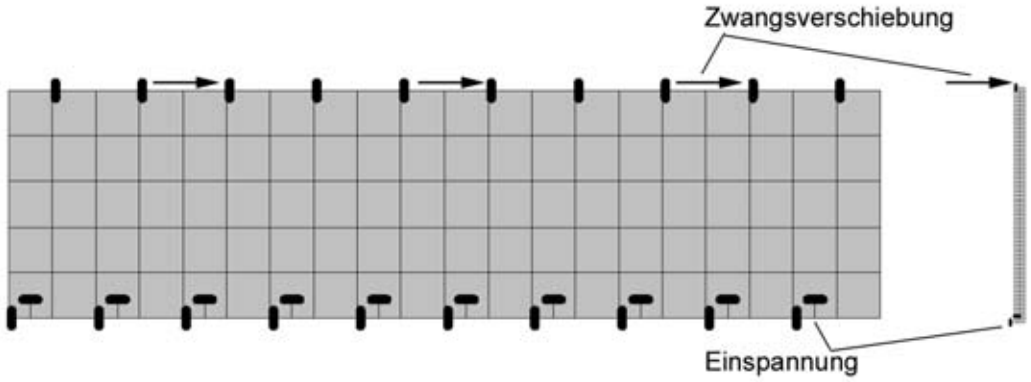

Bild 4.5.: Finite Element Modelle des Blechs in Längsrichtung und Querrichtung

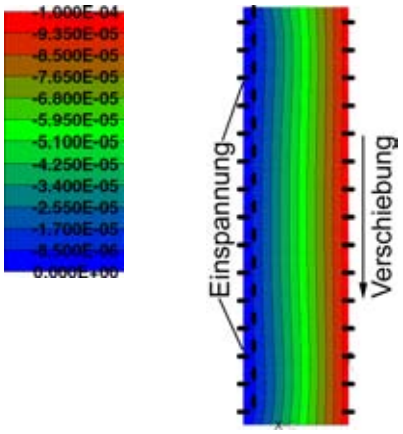

Bild 4.6.: Verschiebung des Bleches in Längsrichtung (in Meter)

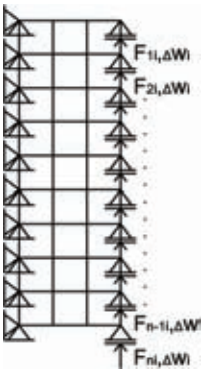

Bild 4.7.: Reaktionskräfte F_i der Zwangsverschiebung

kontrolliert (Tabelle 4.5). Die Steifigkeit um die schwache Achse des vereinfachten Ansatzes unterscheidet sich von der berechneten Steifigkeit aus ATENA 2D um 8 %, die um die schwache Achse um 9 %.

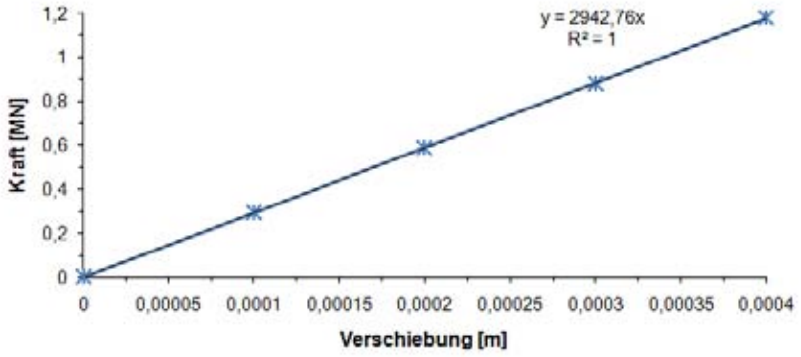

Bild 4.8.: Last-Verformungsdiagramm des Bleches in Längsrichtung

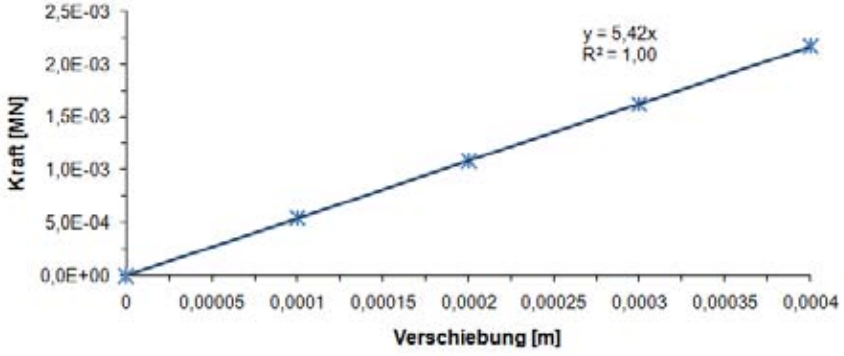

Bild 4.9.: Last-Verformungsdiagramm des Bleches in Querrichtung

Steifigkeiten sind in ATENA 2D als Spannungen einzugeben, daher auf die Dicke des Bauteils zu beziehen. Bei der Definition von Linien als Federn muss daher noch zusätzlich die Dicke sowie die Länge des Bauteils angegeben werden. In der modellierten Fassade wurden die Steifigkeiten der Linienfedern auf eine Bauteilbreite von 1 m bezogen. Als Annahmen wurden daher die Steifigkeiten, welche mithilfe von ATENA 2D ermittelt wurden, verwendet. Die Steifigkeit um die starke Achse wurde mit 2942,7 MN/m^2 angesetzt, die um die schwache Achse mit 5,4 MN/m^2 siehe Tabelle 4.5.

Tabelle 4.5.: Kontrolle der Steifigkeit des Bleches auf Plausibilität

	um die starke Achse		um die schwache Achse	
l=	0,26	m	0,26	m
b=	0,012	m	1	m
h=	1	m	0,012	m
w=	1	m	1	m
A=	0,012	m^2	0,012	m^2
I=	0,001	m^4	1,44E-07	m^4
ν=	0,3		0,3	
E=	200000	MN/m^2	200000	MN/m^2
G=	76923	MN/m^2	76923	MN/m^2
$k = \frac{w}{\frac{l^3}{3EI} + \frac{l}{GA}}$=	3215,85	MN/m	4,91	MN/m
k(errechnet mit ATENA 2D)=	2942,76	MN/m	5,42	MN/m

Fundament

Die Bettung des Fundamentes wurde ebenfalls als Linienfeder modelliert. Da die Aufnahme von vertikalen Zwangskräften nur an wenigen Stellen möglich war, entstanden in den ersten Modellen Rückhaltekräfte in der Fundamentsohle, um ein Abheben der Fassade zu verhindern. Zur Vermeidung der auftretenden Zugspannungen in den Federn wurden die Bettungen der nachfolgenden Modelle mittels Gap-Elemente modelliert. Das Abheben der Fassade in der Gründungssohle wird durch die verformte Struktur in Bild 4.10 dargestellt. Bild 4.11 zeigt das Last-Verformungsdiagramm

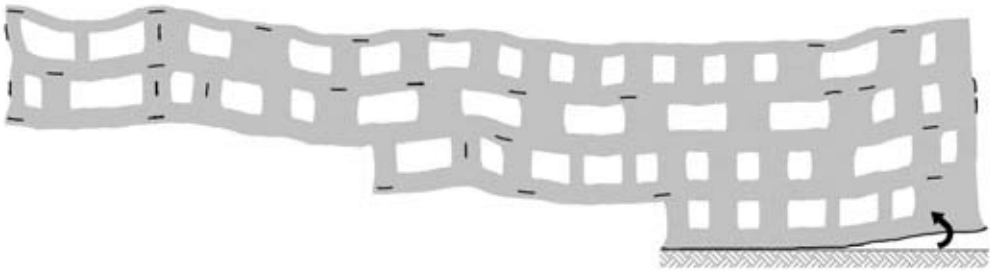

Bild 4.10.: Abheben der deformierten Fassade in der Gründungssohle

der Gap-Elemente mit der hohen Steifigkeit im Druckbereich und der sehr kleinen Steifigkeit im Zugbereich, um Fehler bei der Berechnung zu vermeiden. Zur Modellierung der Scherfestigkeiten des anstehenden Bodens kamen Linienfedern in horizontaler Richtung zur Anwendung. Die angenommene Steifigkeit wurde mit 8000 MN/m^2 vorgegeben.

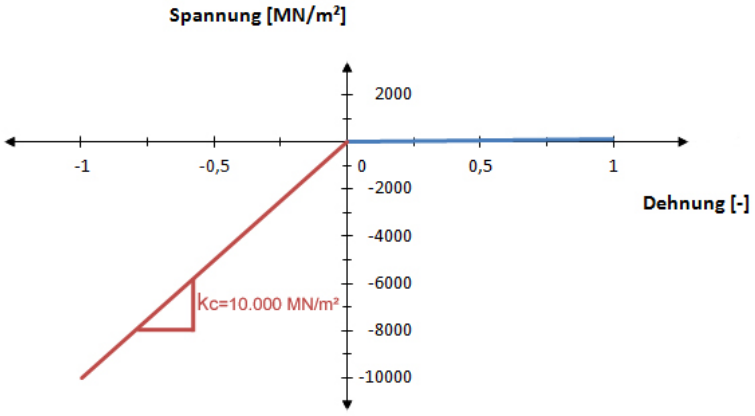

Bild 4.11.: Last-Verformungsdiagramm der Gap-Elemente zur Modelleriung der Fundamentbettung; siehe Bild 4.1 Achse A

4.1.4. Einwirkungen

Die Fassade unterliegt folgenden Lasten und Zwangsbeanspruchungen:

Eigengewicht der Fassade als einzige direkte Einwirkung.

Temperatureinwirkung Aufgrund der hohen angenommenen Temperaturdifferenz von $\Delta T = -30$ °C stellt die Temperatureinwirkung die maßgebende Einwirkung dar. Mit der Wärmedehnzahl von Beton α_T=1 E−05 erhält man die Dehnung durch Temperatureinwirkung mit $\varepsilon_T = 0,3\,‰$.

Schwinden Schwinden stellt die Volumsreduktion durch Austrocknung des Bauteils in Abhängigkeit zu den Feuchtebedingungen der Umgebung sowie durch innere chemische Prozesse dar. Das relative Endschwindmaß zwischen tragender Struktur und Fassade wurde mit $\varepsilon_{cs,\infty} = 0,15\,‰$ angesetzt.

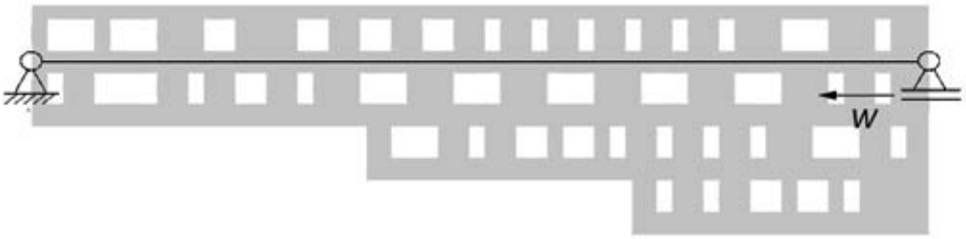

Bild 4.12.: Einfeldträger zur Abschätzung der Gesamtverformung

Werden die Dehnungen aus Schwinden und Temperatureinwirkung addiert, erhält man für die ungehinderte Verformung eines 1 m breiten Betonstreifens mit der Länge und Dicke der Fassade $w = -4,5 \cdot 10^{-4} \cdot 64,34$ =0,03 m (Bild 4.12). Jede Seite der Fassade würde sich ohne Zwängung um ca. 1,5 cm ausdehnen. Unter Einspannung der Enden des Betonstreifens ergibt sich eine Festhaltekraft von $F = 1 \cdot 0,2 \cdot 28300 \cdot 10^3 \cdot 0,03/64,34$ =2639 kN. Für die Aufnahme der Zwangskräfte sorgen die horizontalen Befestigungsbleche, welche die Fassade mit der tragenden Struktur verbinden. Die Begrenzung der großen Verformung durch die Verbindungsmittel verursacht daher hohe Zwangsspannungen und in weiterer Folge Rissbildungen. Die große Längenausdehnung der Fassade sowie die starken Temperaturunterschiede können als Hauptursachen der starken Rissbildungen angesehen werden.

Teilsicherheitsbeiwerte der Einwirkungen

Tabelle 4.4 zeigt die verwendeten Teilsicherheitsbeiwerte zur Ermittlung der Bemessungswerte der Einwirkung (nach dm140108).

Tabelle 4.6.: Teilsicherheitsbeiwerte der Einwirkungen (nach dm140108)

		Grenzzustand der Tragfähigkeit	Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit
Ständige Einwirkung	γ_G	$1,50^{1}$	1,00
Zwang	γ_s	1,15	1,00

1) Der Grenzzustand der Tragfähigkeit diente zur Ermittlung der maximalen Reaktionskräfte der Blechanschlüsse. Das Eigengewicht der Fassade stellt daher eine ständige Auflast dar.

4.1.5. Lastgeschiche und Pfadverfolgungsalgorithmus

Die Einwirkungen wurden in der folgenden Reihenfolge auf das System aufgebracht,

$$\underline{P} = \underline{P}_G + \lambda_1 \underline{P}_S + \lambda_2 \underline{P}_T \tag{4.3}$$

mit $\underline{P}_G$ =Eigengewicht $\underline{P}_S$ =Schwinden $\underline{P}_T$ =Temperatureinwirkung

wobei die Lastfaktoren λ_1 und λ_2 der indirekten Einwirkungen, Temperatur und Schwinden, in jeweils 10 Lastinkremente unterteilt wurden. Als Pfadverfolgungsalgorithmus wurde das NEWTHON-RAPHSON-Verfahren eingesetzt um Tragwerksantworten in den vorgegebenen Laststufen zu erhalten. Die Genauigkeitsschranke des Abbruchkriteriums ε_{tol} wurde im Fall der Vektornormen mit 0,01 gewählt und im Fall der Energienormen mit 0,0001.

4.2. Optimierung der Anordnung der Befestigungsmittel

4.2.1. Einhaltung der Gebrauchstauglichkeit

Die große Länge der Fassade in Längsrichtung von insgesamt bis zu 64 m verursacht durch die Festhaltungen die größten Zwangsspannungen in horizontaler Richtung. Diese Zwangspannungen werden wesentlich von der Anordnung der horizontalen Bleche beeinflusst. Die vertikalen Bleche sollen hauptsächlich das Eigengewicht aufnehmen. Die Rissbildungen und Verformungen stehen damit in Abhängigkeit zu der Position der horizontalen Bleche. Weiters beeinflusst die Anzahl der Befestigungsmittel die Wirtschaftlichkeit der Konstruktion durch die hohen Kosten der Stahleinlegeteile. Der Nachweis der Gebrauchstauglichkeit sollte also unter Verwendung möglichst weniger Befestigungsmittel eingehalten werden. Um dies zu erreichen, wurden die Befestigungspositionen und die Anzahl an Befestigungen schrittweise optimiert. Schwerpunkt galt dem Beschränken von Rissbreiten, um Wasserundurchlässigkeit und den damit verbundenen Korrosionsschutz der Bewehrung zu gewährleisten. Bei der Modellbildung wurde aufgrund der hohen Rechenzeiten auf die Modellierung der konstruktiven Zusatzbewehrung in den Fensterecken verzichtet. Deshalb wurde in diesen Bereichen auch ein Überschreiten der zulässigen Rissbreite von 0,2 mm zugelassen. Die Einhaltung der zulässigen Rissbreite wurde von Berechnungen in Teilausschnitten der Fassade unter Berücksichtigung der konstruktiver Zusatzbewehrung bestätigt. Ziel der Optimierung waren daher über die Oberfläche gleichmäßig verteilte begrenzte Rissbildungen, im Gegensatz zu vereinzelten großen Rissbildungen. Zudem sollte die rechnerische Gesamtverformung in Längsrichtung auf 3mm begrenzt werden.

Ablauf der Optimierung

Die Optimierung der Position der Befestigungsbleche wurde iterativ durchgeführt. In jedem Schritt wurden die berechneten Ergebnisse von drei bis fünf Modellen ausgewertet und danach die Anpassungen der Blechbefestigungen vorgenommen. Abschließend wurden die neuen angepassten Modelle berechnet. Die Anzahl der zu

berechneten Modelle wurde aufgrund der langen Rechenzeiten so groß gewählt, um zumindest einen Iterationsschritt innerhalb von 24 Stunden durchführen zu können. Da Modelle mit kleinen verteilten Rissbildungen das Ziel des Iterationszyklus darstellten, wurde als Kriterium für die Reihung der Modelle die Summe der Überschreitungen des Rissbreitengrenzwertes vom 0,2mm verwendet:

$$W = \sum_{i=1}^{n} w_{\text{Ü},i} \qquad w_{\text{Ü},i} = \begin{cases} (w_i - 0,0002) & \text{wenn } w_i \geq 0,0002\text{m}, \\ 0 & \text{wenn } w_i < 0.0002\text{m}. \end{cases} \tag{4.4}$$

w_i entspricht dabei der Rissbreite eines Integrationspunktes oder Elementknotens der letzten Laststufe aus der numerischen Ausgabe von ATENA 2D, wobei jedem Modell ein W zugeordnet wurde. Modelle mit wenigen großen Rissen werden daher oft schlechter eingestuft als Modelle mit vielen kleinen Rissen. Die Berechnungen von W wurden im Programmpaket Microsoft Excel mit der Programmiersprache Visual Basic durchgeführt (Programmierung B.5). Ausgangspunkt der Optimierung waren Modelle mit zufälligen Anordnungen der Befestigungsmittel, welche nach der Berechnung mithilfe von W eingestuft wurden. Danach wurde im Modell mit der kleinsten Summe der Überschreitungen des Rissbreitengrenzwertes nach Bereichen mit großen Rissbreiten gesucht. Anschließend wurde in den anderen Modellen nach besseren Ergebnissen in den betreffenden Bereichen gesucht. Die Rissbildungen wurden dabei mithilfe der grafischen Ausgabe von ATENA 2D verglichen. Zusätzlich wurde ein Programm entwickelt, welches die Bereiche vergleicht (Programmierung B.6). Alle Modelle wurden dazu in Rasterelemente unterteilt (Bild 4.13) und anschließend die Summe der Überschreitungen des Rissbreitengrenzwertes für jedes Rasterelement gebildet. Das Programm ermittelte zuerst die fünf Rasterelemente mit den größten Summen der Überschreitungen innerhalb des Modells mit den geringsten Wert von W. Anschließend wurde für jedes der fünf Rasterelemente das Modell ermittelt, in welchen die geringste Summe der Rissbreitenüberschreitungen in den betreffenden Rasterelementen festgestellt wurde. Wurden Modelle mit besseren Ergebnissen in den entsprechenden Bereichen gefunden, so wurde versucht eine Ursache-Wirkungsbeziehung zwischen den Blechpositionen und den Rissbildungen herzustellen. Es wurde dabei nach Blechen oder Blechgruppierungen gesucht, die durch ihre unterschiedliche Lage geringere Rissbildungen in den jeweiligen Bereichen verursachen. Durch die Übernahme dieser Blechanordnungen in das Modell mit den kleinsten Überschreitungen des Rissbreitengrenzwertes wurden neue, angepasste Modelle erhalten. Es wurde dabei angenommen, dass diese Übernahme auch

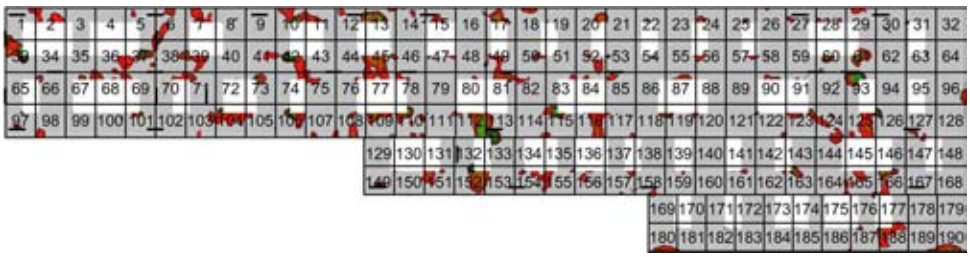

Bild 4.13.: Einteilung des Modells in Rasterelemente

in der nichtlinearen Berechnung eine Verbesserung in der Rissbildung hervorruft. Wurden keine Verbesserungen in den bisherigen Modellen festgestellt, so wurden Modelle mit versuchsweiser Anordnung der Blechpositionen erstellt. Nach der Berechnung der neuen Modelle wiederholte sich die Vorgehensweise. Bild 4.14 zeigt den Ablauf der Optimierung. Konnte in den folgenden Iterationsschritten kein besseres Ergebnis der Rissbildungen durch die Anpassung der Bleche erzielt werden, so gab es zwei Möglichkeiten. Entweder es wurde versucht durch neue Modelle, mit versuchsweiser Anordnung der Bleche, bessere Ergebnisse zu erzielen oder es wurde das Modell mit den geringsten Rissbreitenüberschreitungen des letzten Iterationsschrittes weiter angepasst (Bild 4.15).

In den ersten Schritten der Iteration wurde die Blechoptimierung in drei Teilbereichen der Fassade vorgenommen, welche unabhängig voneinander betrachtet wurden (Bild4.17 bis Bild 4.19). Es wurde dabei angenommen, dass sich lokale Änderungen der Befestigungsmittel zum größten Teil auf Rissbildungen in unmittelbarer Nähe auswirken. Innerhalb der Optimierung in den Teilbereichen wurden die Blechanordnung stark verändert. Aufgrund der langen Rechenzeiten wurden in jedem Modell mehrere Anpassungen vorgenommen, wodurch sich beim Vergleich der Modelle oft Schwierigkeiten in der Zuordnung von unterschiedlicher Blechposition und Rissbildung ergaben. Die Verfeinerung der Blechanordnung wurde am gesamten Modell vorgenommen (Bild 4.20). In jedem Modell wurden im Laufe der Iteration nur mehr wenige und zum Schluss nur mehr einzelne Blechpositionen geändert. Nach bestimmten Optimierungsschritten wurden nur mehr einzelne Blechpositionen in den Modellen geändert, sodass den unterschiedlichen Blechpositionen im anschließenden Vergleich der Rissbildungen bestimmte Bereiche der Verbesserung oder Verschlechterung zugeordnet werden konnten. Man brauchte daher keine Vermutungen über die Wirkung unterschiedlicher Blechpositionen anstellen. Die Anwendung der unterschiedlichen Blechpositionen dient dann zur Verbesserung des anzupassenden Modells. Um die

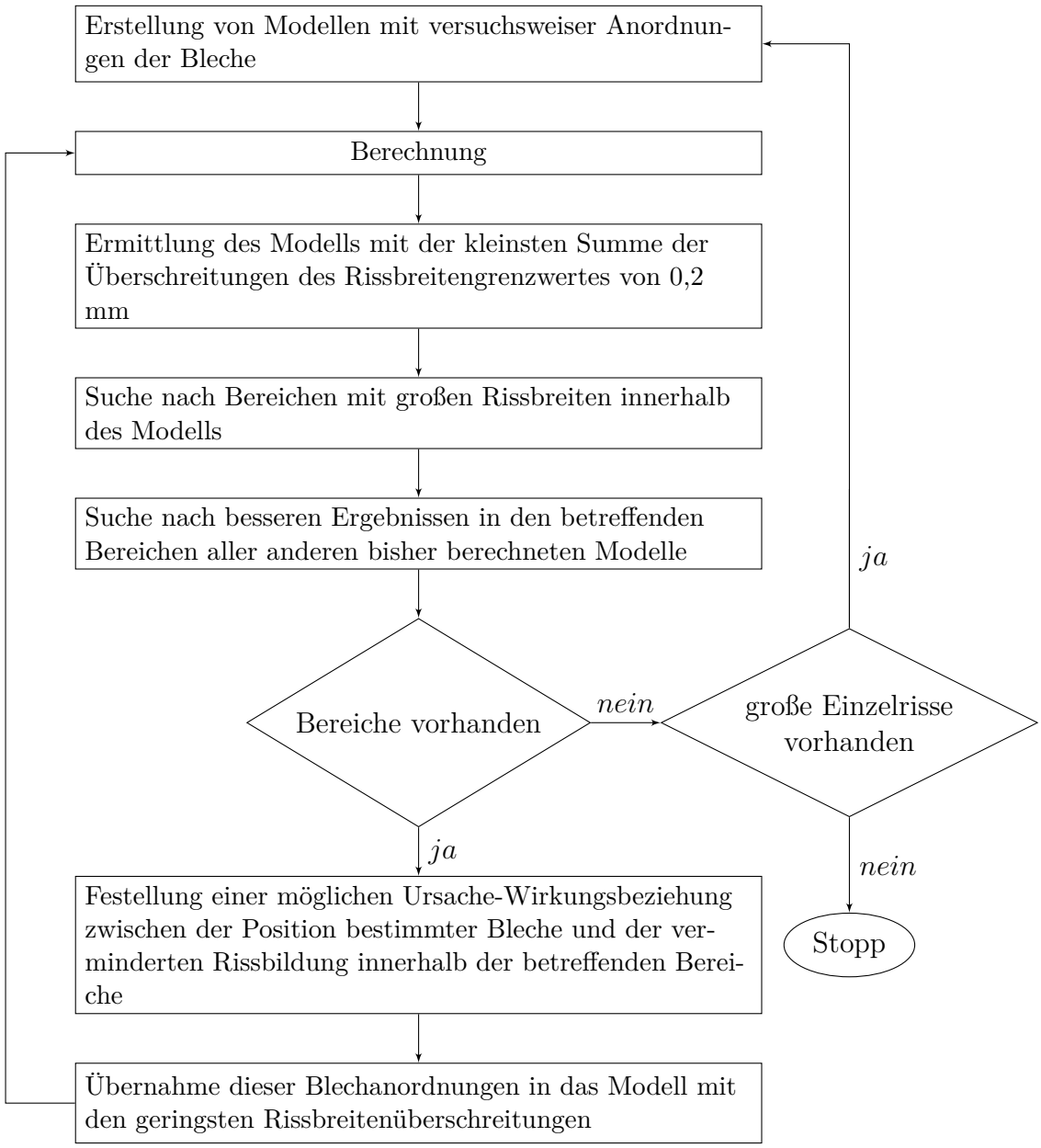

Bild 4.14.: iterative Vorgehensweise beim Varieren der Blechposition

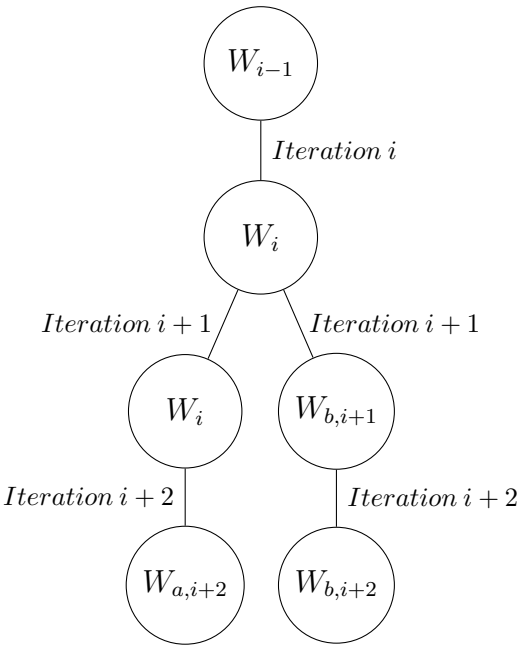

Bild 4.15.: Aufspaltung des Iterationszyklus

relative Verbesserung oder Verschlechterung von Rissbildungen zwischen zwei Modellen zu ermitteln, wurde das Programm B.7 erstellt. Aufgrund der beschränkten Befestigungsmöglichkeiten von Blechen zur Aufnahme von vertikalen Kräften war die vertikale Verformung in allen Modellen der Optimierung über dem vorgegebenen Grenzwert. Zur Einhaltung der maximal zulässigen Verformung musste der Bewehrungsgrad deshalb erhöht werden. Weiters wurde die Bettung des Fundaments als Gap-Element modelliert, um die Einleitung von Zug in vertikaler Richtung durch Abheben der Fassade zu verhindern. Mit den vorgenommenen Änderungen wurde anschließend die Optimierung fortgesetzt (Bild 4.21). Die nachfolgenden Abbildungen zeigen den Verlauf der Optimierung anhand der maßgebenden grafischen Ergebnisse aus ATENA 2D. Im Anhang A befindet sich ein größerer Auszug der grafischen Ergebnisse sortiert nach W. Für die Modelle ohne Gap-Element wurden zur Berechnung von W die Rissbreiten in den Elementknoten verwendet. Für die Modelle mit Gap-Element wurden die Rissbreiten in den Integrationspunkten verwendet. Um die grafischen Ergebnisse vergleichbar zu machen, liegt der dargestellte Bereich der Rissbreiten zwischen 0,2 mm und 0,5 mm (Bild 4.16). Die optimierte Blechanordnung zeigt Bild 4.22, die dazugehörigen Koordinaten in den Mittelpunkten der einzelnen Bleche finden sich in den Tabellen 4.7 und 4.8. Die Einhaltung der maximalen Verformung in Längsrichtung von 3 mm, des resultierenden Ergebnisses aus der Optimierung, zeigt Bild 4.23.

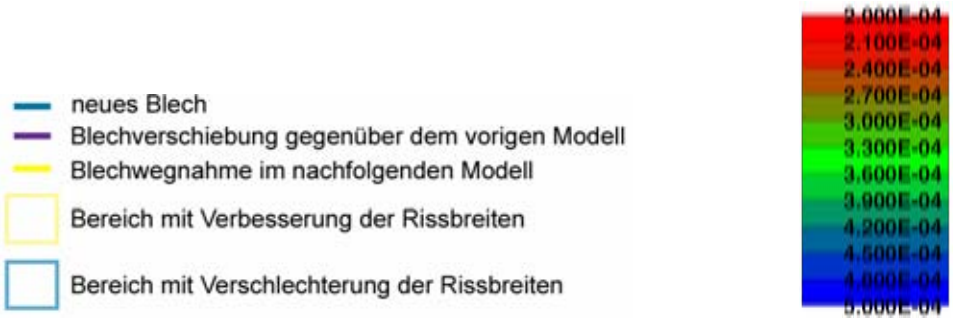

Bild 4.16.: Legende und farbliche Skala zur Einteilung der Rissbreiten in Meter (gilt für Bilder 4.17 bis 4.21)

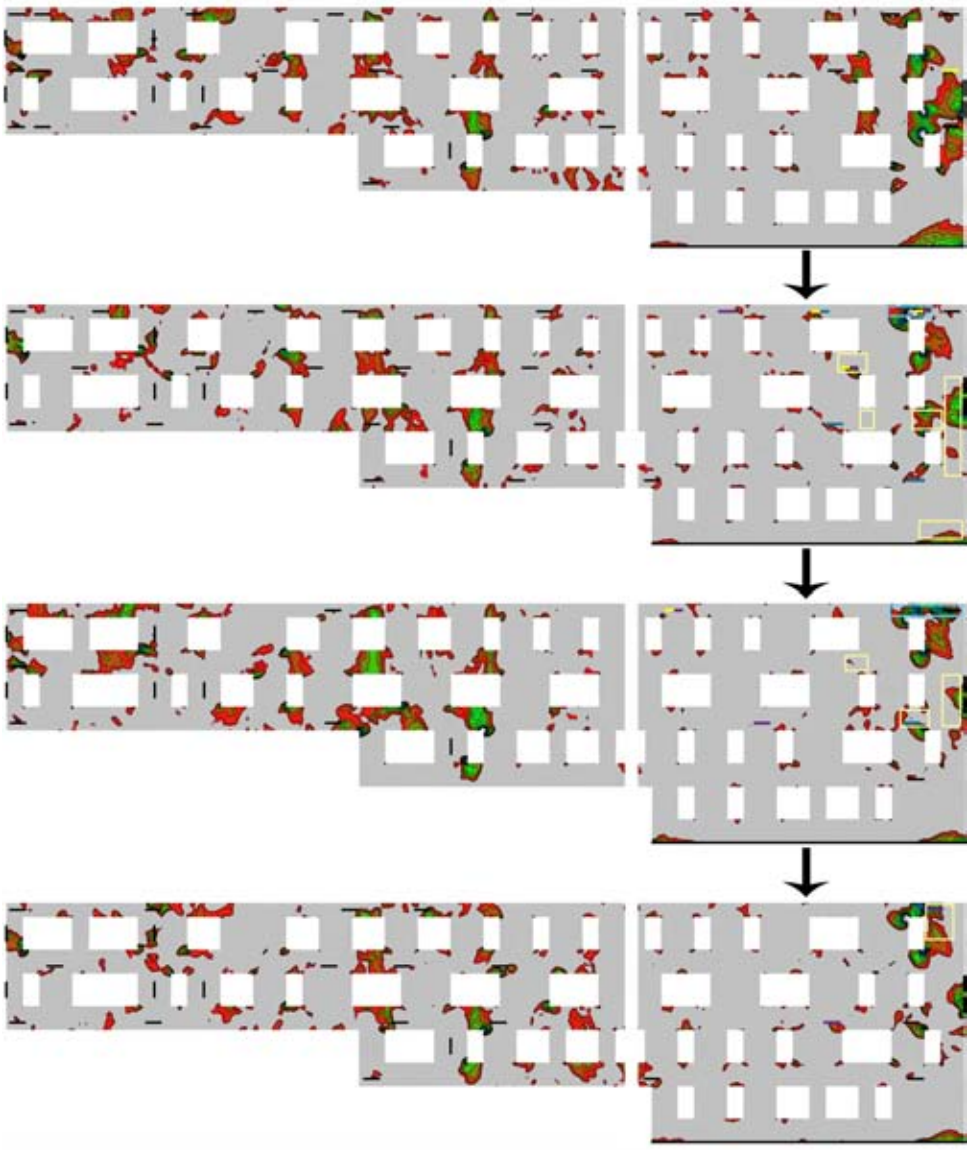

Bild 4.17.: Optimierung der Befestigungsmittel des rechten Teils der Fassade

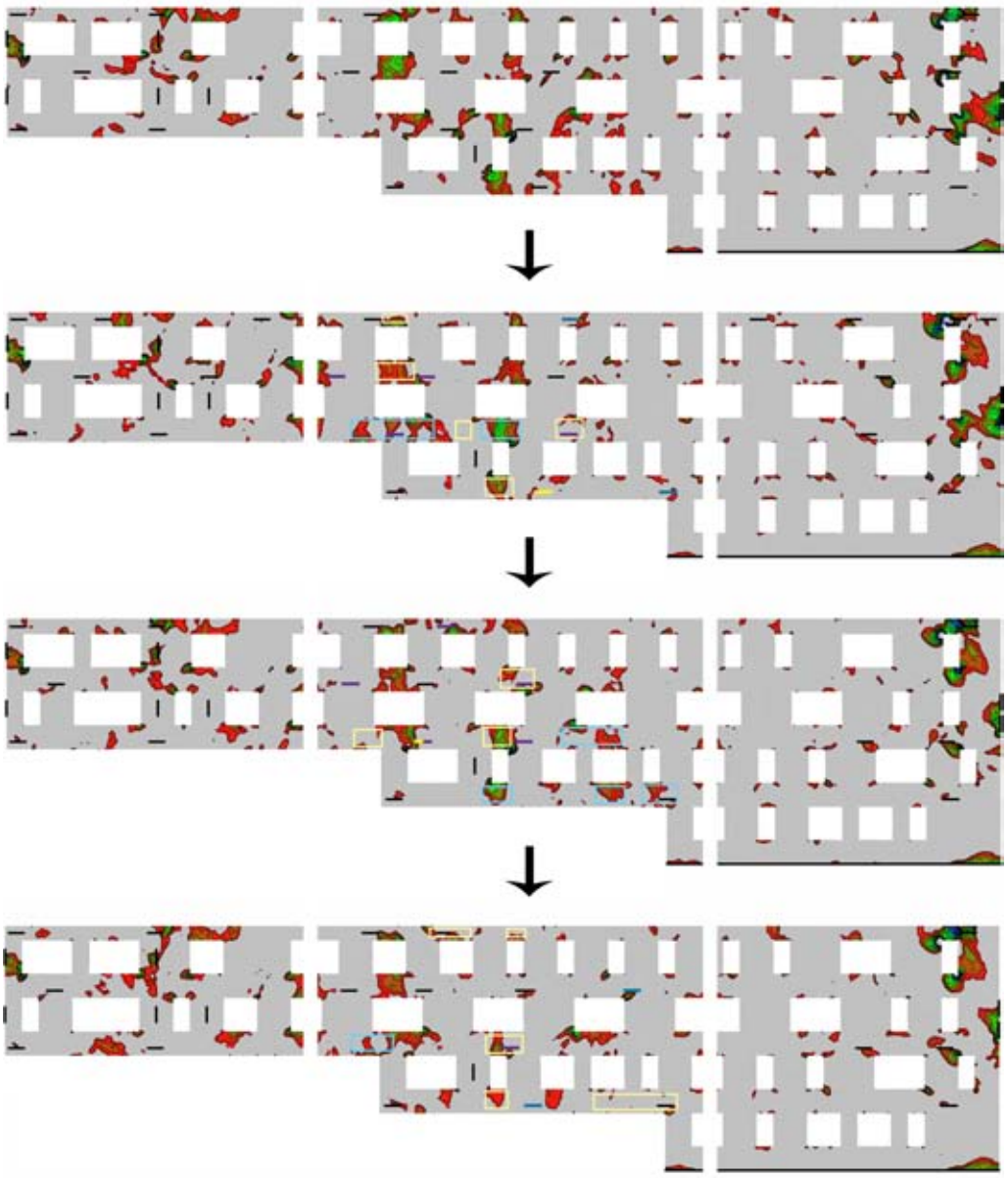

Bild 4.18.: Optimierung der Befestigungsmittel des mittleren Teils der Fassade

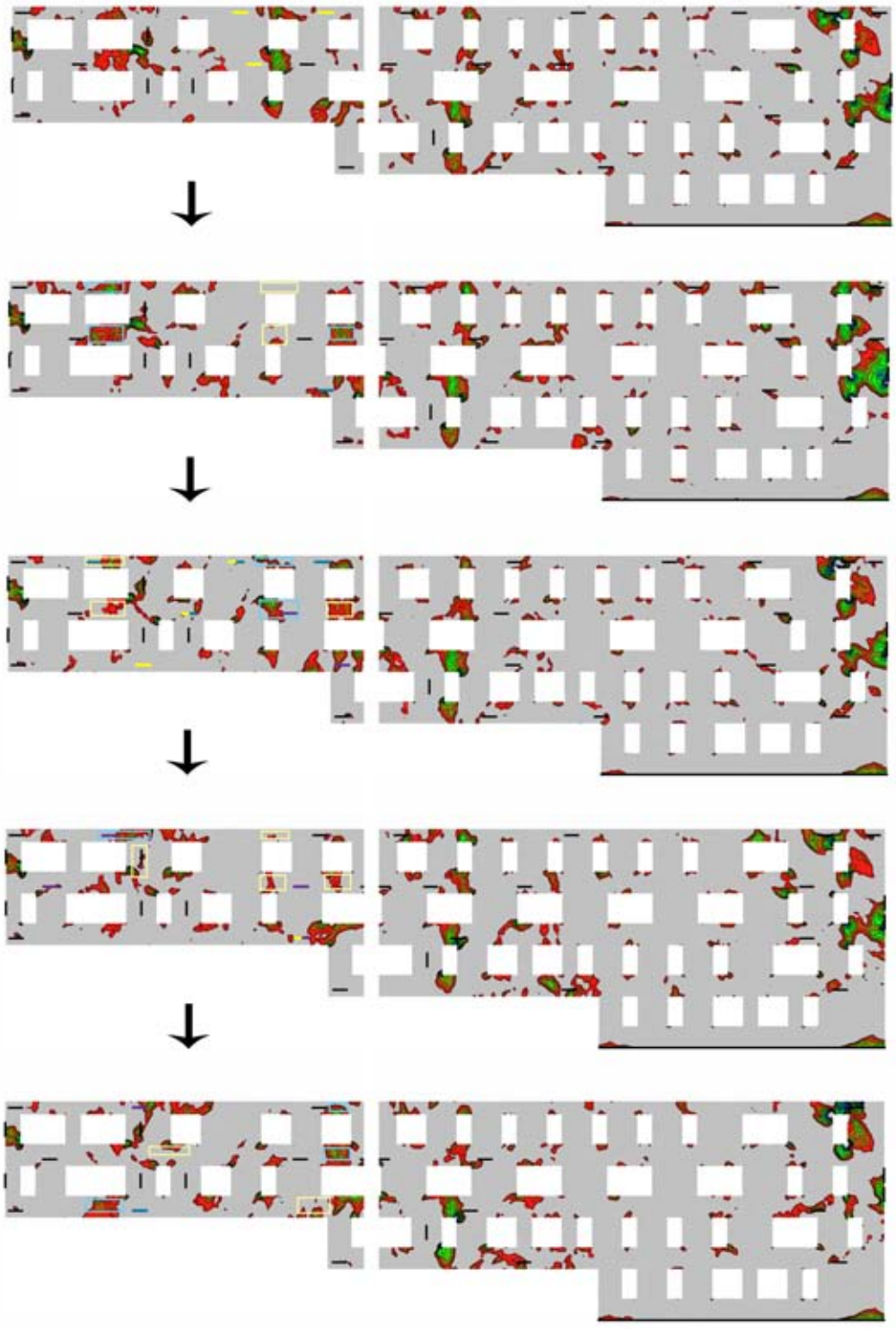

Bild 4.19.: Optimierung der Befestigungsmittel des linken Teils der Fassade

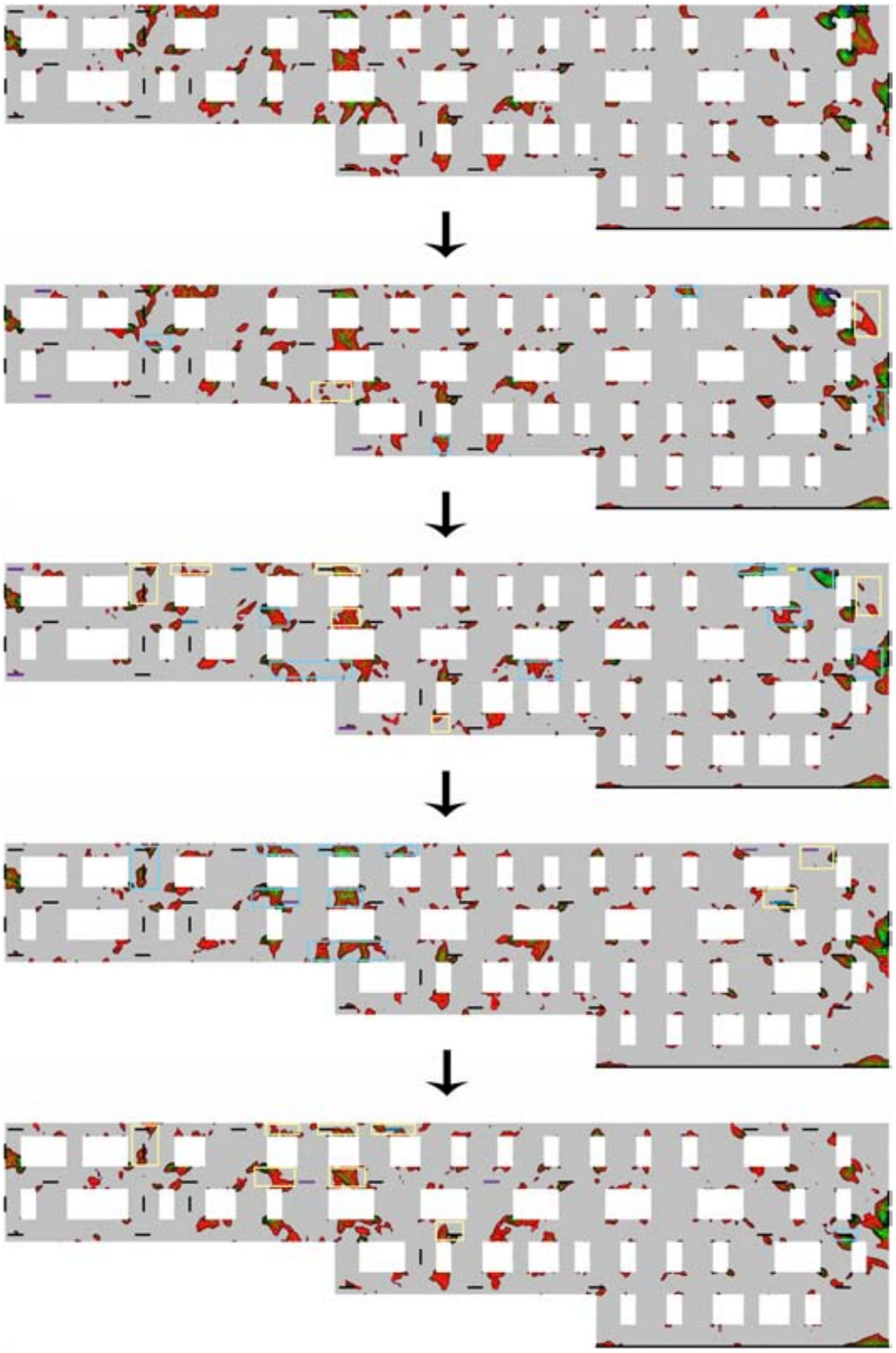

Bild 4.20.: Optimierung der Befestigungsmittel ohne Gap-Element

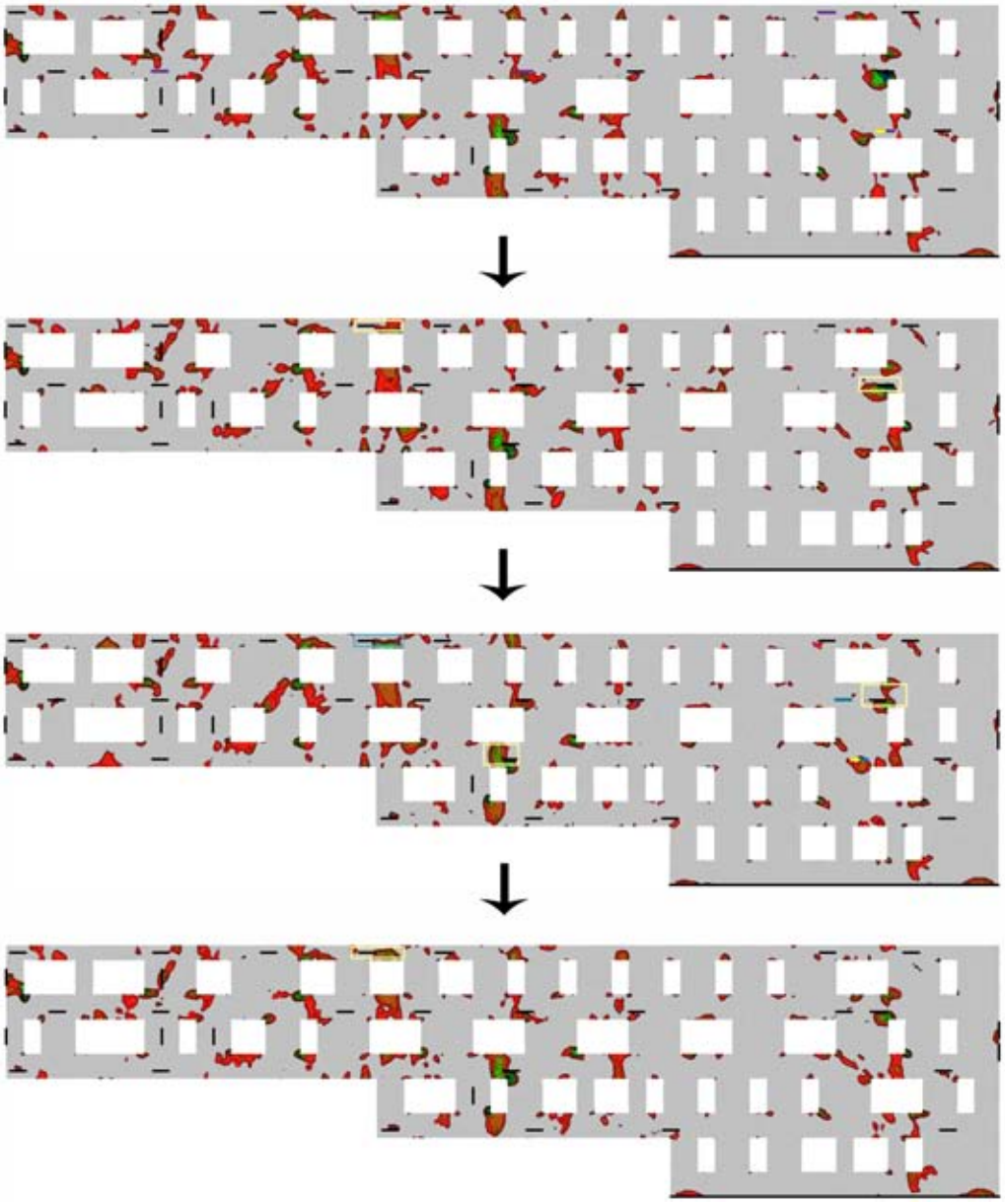

Bild 4.21.: Optimierung der Befestigungsmittel mit Gap-Element und erhöhten Bewehrungsgehalt

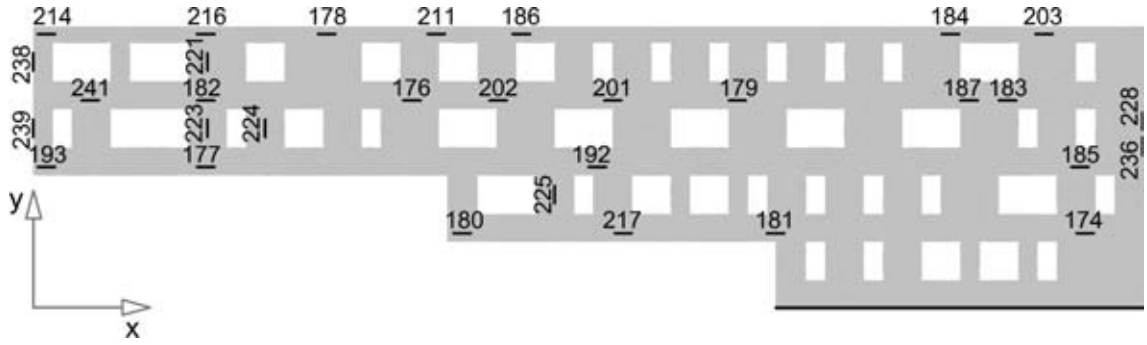

Bild 4.22.: Ergebnis der Optimierung und Bezeichnung der Linienfedern

Tabelle 4.7.: Koordinaten in den Mittelpunkten der horizontalen Linienfedern

Liniennr.	x [m]	y [m]
193	0,75	8,15
214	0,75	15,83
241	3,3	11,99
177	10	8,15
182	10	11,99
216	10	15,83
178	17	15,83
176	21,955	11,99
211	23,37	15,83
180	24,87	4,31
202	26,955	11,99
186	28,3	15,83
192	32,7	8,15
201	33,6	11,99
217	34,22	4,31
179	40,82	11,99
181	43,05	4,31
184	53,2	15,83
187	54,26	11,99
183	56,5	11,99
203	58,62	15,83
185	60,7	8,15
174	61	4,31

Tabelle 4.8.: Koordinaten in den Mittelpunkten der vertikalen Linienfedern

Liniennr.	x [m]	y [m]
239	0	10,38
238	0	14,22
223	10,08	10,38
221	10,08	14,22
224	13,44	10,38
225	30,24	6,54
236	64,315	9,35
228	64,315	10,79

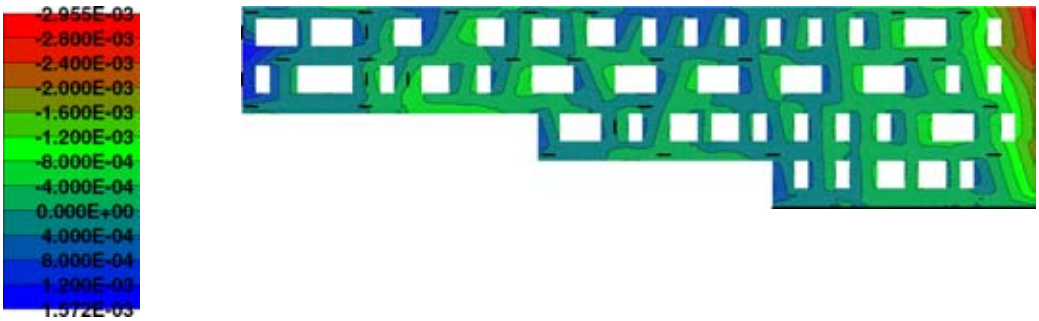

Bild 4.23.: Verformung in Längsrichtung des Endergebnisses aus der Optimierung (in Meter)

4.2.2. Einhaltung der Tragfähigkeit

Neben der Einhaltung der zulässigen Verformung sowie Beschränkung der Rissbreiten durften die in die Bleche eingeleiteten Zwangskräfte und Kräfte aus Eigengewicht die maximale Traglast des Blechanschlusses nicht überschreiten. Das Tragvermögen des Anschlusses der Stahleinlegeteile mit der Fassade wurde mithilfe des Programmpaketes ATENA 3D ermittelt. Es wurde der Anschluss eines Festhaltebleches inklusive der Kopfbolzen mit der Fassade im 3D-FE Programm modelliert. Der Fassadenausschnitt des Anschlusses wurde an den Rändern als unverschieblich angenommen und Zwangsverschiebungen an der Seite des Bleches aufgebracht, welche mit der tragenden Struktur eingebunden ist (Bild 4.25 und Bild 4.24). Die Einbindung des Bleches mit der tragenden Struktur wurde, außer der aufgezwungenen Verschiebung in Längsrichtung, als starre Einspannung modelliert. Da der Anschluss vertikale Symmetrie aufweist, wurde mithilfe von Symmetriebedingun-

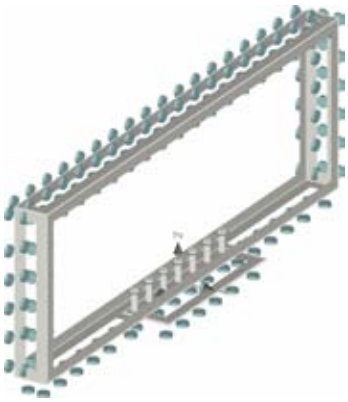

Bild 4.24.: Randbedingungen des 3D Modells

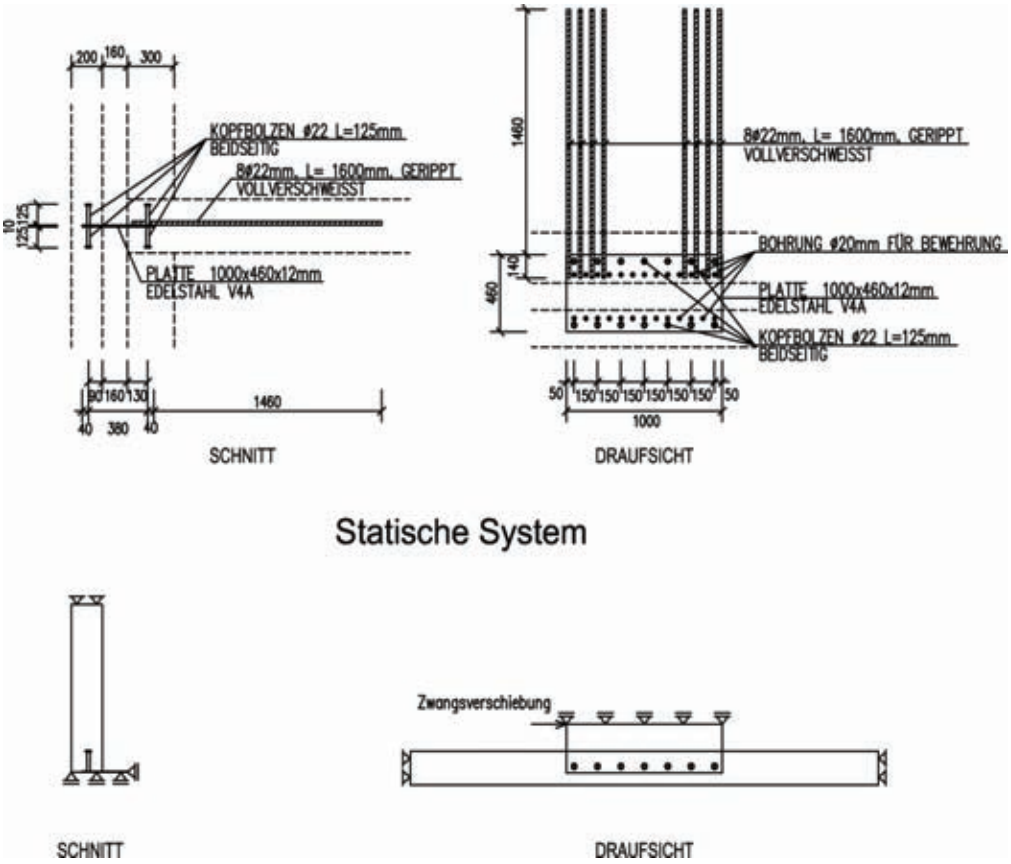

Bild 4.25.: Modellierung des Blechanschlusses in ATENA 3D

gen nur die Hälfte des Anschlusses modelliert. Die Tragfähigkeit wurde durch die Methode der Teilsicherheitsbeiwerte abgeschätzt. Der Bemessungswert der Tragfähigkeit wurde daher in einer Berechnung unter Anwendung der Bemessungswerte der Materialparameter ermittelt. Um die Gesamtlast aus einer Zwangsverschiebung zu bekommen, wurden die Knotenreaktionskräfte aller Knoten mit aufgezwungener Zwangsverschiebung summiert und anschließend aufgrund der Symmetrienutzung verdoppelt (Programmierung B.1). Durch Auswertung der numerischen Ergebnisse aus allen Lastschritten wurde das Last-Verformungsdiagramm erhalten (Bild 4.26). Die maximale Traglast wurde dadurch mit 1,45 MN ermittelt. Versagen tritt durch die volle Plastizierung des Blechquerschnitts ein (Bild 4.28). Die volle Kraftübertragung von den Kopfbolzen in den Beton ist dabei weiterhin gegeben. Zur Überprüfung der Tragfähigkeit des Bleches wurde das 2D Modell zur Ermittlung der Steifigkeit in Kapitel 4.1.3 verwendet (Bild 4.27). Die Traglasten der beiden Modelle unterscheiden sich um 6 %.

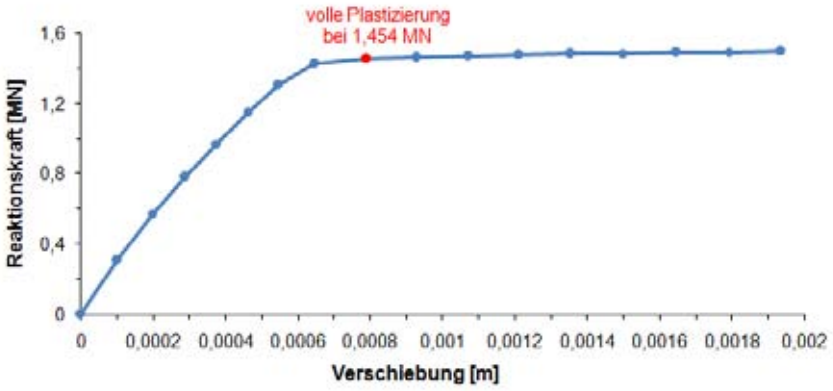

Bild 4.26.: Last-Verformungsdiagramm des 3D Modells

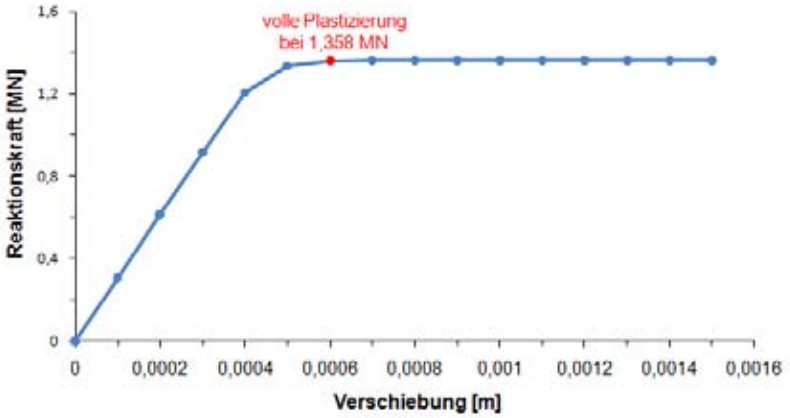

Bild 4.27.: Last-Verformungsdiagramm des 2D Modells

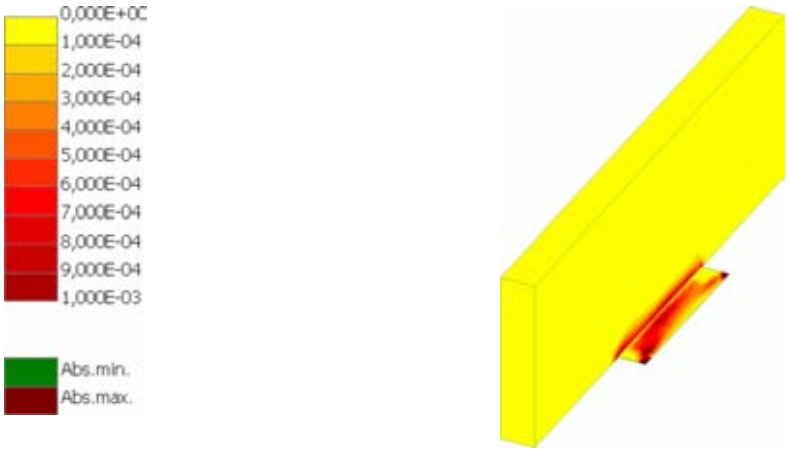

Bild 4.28.: Volle Plastizierung anhand der plastischen Hauptdehnung

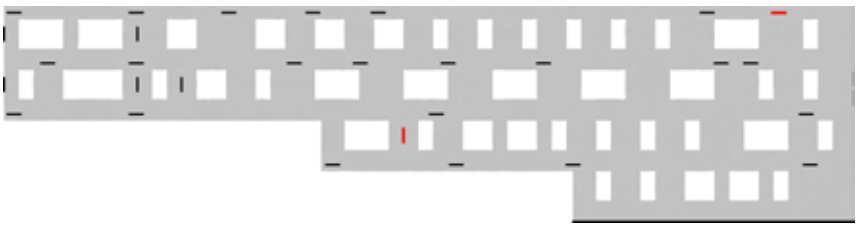

Bild 4.29.: Bleche mit den größten Reaktionskräften (rot)

Die Bemessungswerte der Einwirkung stellen die Reaktionskräfte der Linienfedern der modellierten Fassade in ATENA 2D dar. Da in ATENA 2D Knotenreaktionskräfte ausgegeben werden, welche einen Teil der gesamten Reaktionskraft der Linienfedern darstellen, wurde ein Programm zur Berechnung der Reaktionskräfte von Linienfedern erstellt (Programmierung B.3 und B.4). Das Programm sucht zuerst für jede Linienfeder die Knoten innerhalb der Linie und summiert danach die Anteile der Reaktionskraft jedes Knotens zu Federkräften. In Bild 4.29 wurden die Linienfedern mit den größten Reaktionskräften, des Modells mit der besten Rissverteilung, rot gekennzeichnet. Die maximalen Reaktionskräfte wurden im Grenzzustand der Tragfähigkeit(ULS) ermittelt. Da die Bemessungswerte der Zwangsbeanspruchung im ULS den charakteristischen Werten entsprechen und die Materialparameter durch die Teilsicherheitsfaktoren des ULS sehr stark ab gemindert werden, hat der Beton frühzeitig zu reißen begonnen und das System an Steifigkeit verloren. Im Unterschied zum Grenzzustand der Tragfähigkeit(ULS) ist im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit(SLS) der Steifigkeitsverlust durch die geringere Abminderung der Materialparameter und den gleichen Bemessungswerten der Zwangsbeanspruchung später eingetreten (Bild 4.30). Da Zwangsschnittgrößen wesentlich von der Steifigkeit

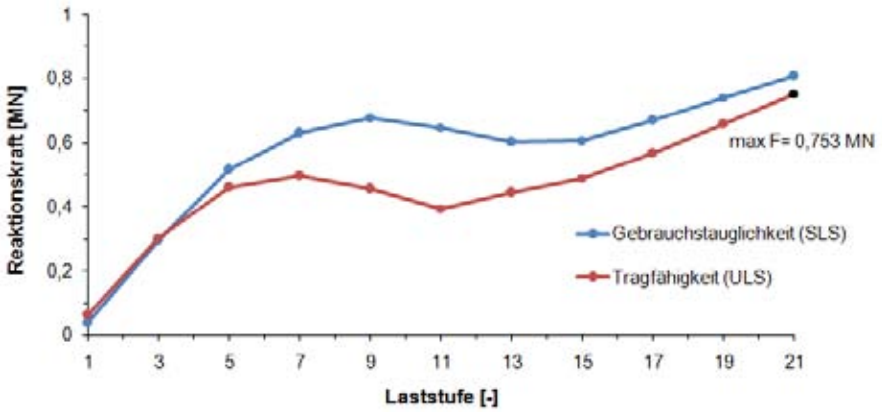

Bild 4.30.: Lastgeschichte des Blechs mit der größten horizontalen Beanspruchung

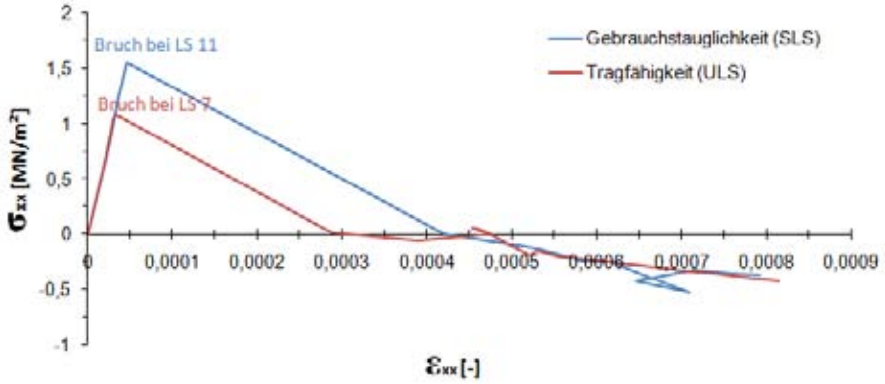

Bild 4.31.: Spannungs-Dehnungsbeziehung in einem Integrationspunkt

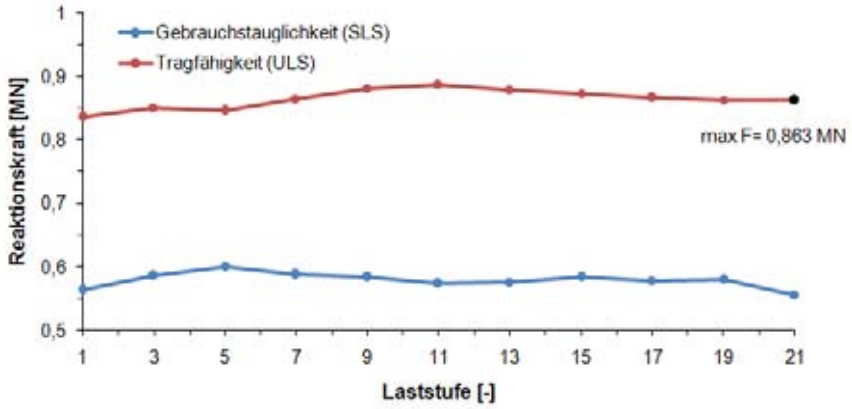

Bild 4.32.: Lastgeschichte des Blechs mit der größten vertikalen Beanspruchung

des Systems abhängen, wurden für die horizontalen Zwangskräfte im SLS durch den später eintretenden Steifigkeitsverlust höhere Werte erhalten als im ULS. Die Spannungs-Dehnungsbeziehungen in den Integrationspunkten der Elemente zeigen die frühzeitige Rissbildung im ULS und den damit verbundenen Steifigkeitsverlust auf Elementebene (Bild 4.31). Die größte Reaktionskraft in vertikaler Richtung wird vorwiegend durch das Eigengewicht der Fassade verursacht. Durch den größeren Bemessungswert des Eigengewichts im ULS ergeben sich damit größere Federkräfte als im SLS (Bild 4.32). Damit liegen alle Einwirkungen unter der ermittelten Traglast eines Einzelbleches von 1,45 MN. Zur Überprüfung der berechneten Federkräfte wurde die Summe aller Federkräfte in horizontaler und vertikaler Richtung gebildet (Tabellen 4.9 und 4.10). Da die Fassade in horizontaler Richtung nur Zwangsbeanspruchungen aufweist ergibt sich die Summe der horizontalen Federkräfte zu Null. In vertikaler Richtung bleibt als äußere Last das Eigengewicht übrig.

Tabelle 4.9.: Summe der Reaktionskräfte in x-Richtung

Liniennr.	Reaktionskräfte [MN]
	Reaktionskräfte der horizontalen Bleche
203	0,753265
174	0,585080
180	-0,431956
214	-0,403723
185	0,390811
241	-0,383653
193	-0,381905
183	0,268025
178	-0,210316
181	-0,156693
216	-0,118135
187	0,108270
184	0,103848
217	0,093943
202	0,057434
186	-0,049001
192	-0,047913
179	-0,034512
177	0,022701
182	-0,022109
201	-0,019152
211	-0,016268
176	0,010040
	Reaktionskräfte der vertikalen Bleche
228	0,008613
236	0,007354
239	-0,005557
224	0,003615
238	-0,003196
221	-0,000935
225	-0,000687
223	0,000658
	Reaktionskraft des Fundamentes
172	-0,127947
$\sum$	0,000000

Tabelle 4.10.: Summe der Reaktionskräfte in y-Richtung

Liniennr.	Reaktionskräfte [MN]
	Reaktionskräfte der horizontalen Bleche
211	0,038941
184	0,037500
179	0,031859
176	0,031616
201	0,028110
186	0,027910
187	0,027766
203	0,027286
183	0,025216
178	0,023225
202	0,020407
192	0,015979
217	0,013177
180	0,012766
241	0,012038
181	0,011732
185	0,010577
177	-0,004854
216	0,004755
214	0,004228
174	0,003841
193	-0,002783
182	0,000977
	Reaktionskräfte der vertikalen Bleche
225	0,863278
228	0,622229
221	0,622197
238	0,359418
224	0,355541
223	-0,253958
236	0,239968
239	-0,134328
	Reaktionskraft des Fundamentes
172	1,117895
$\sum(\triangleq 1,5\,G)$	4,194507
$1,5\,G$ (Kontrolle)	4,194507

5. Zuverlässigkeit der Fassade

Das erhaltene Ergebnis der Optimierung wurde zur Durchführung einer Zuverlässigkeitsanalyse verwendet. Die Untersuchung bezieht sich dabei auf die Einhaltung des Grenzzustandes der Gebrauchstauglichkeit. Die Analyse bestimmt den Einfluss der streuenden Materialparameter auf die Rissbildung und Verformung unter Berücksichtigung unterschiedlicher Blechdicken der Befestigungsmittel.

ATENA 2D ermöglicht gemeinsam mit dem Programm FREET die Zuverlässigkeit von Tragwerken abzuschätzen. In FREET können Unsicherheiten von ausgewählten Materialparametern des deterministischen Modells durch angenommene Verteilungsdichten beschrieben werden. Eventuell vorhandene Abhängigkeiten der Zufallsgrößen werden dabei durch Korrelationskoeffizienten festgelegt. Danach generiert das Programm zufällige Materialparameter unter Berücksichtigung der Verteilungsdichten. Die unterschiedlichen Materialparameter werden zu Proben gruppiert, welche die Eingangsgrößen in das deterministische Modell darstellen. Die Anzahl der festgelegten Proben bestimmt die Genauigkeit der Zuverlässigkeit einer Systemantwort. Für jede der Proben wird anschließend in ATENA 2D eine nichtlineare Berechnung durchgeführt. Im FREET können die Systemantworten als Ergebnisse der Berechnung dann statistisch ausgewertet werden. Das Programm ermittelt die statistischen Parameter von definierten Systemantworten sowie Verteilungsfunktionen, welche die Histogramme der Systemantworten am besten charakterisieren. Weiters wird die Sensitivität einer Systemantwort auf Änderungen der Eingangsgrößen, z.B. Materialeigenschaften, berechnet. Bild 5.1 zeigt den Ablauf der probabilistischen Analyse mithilfe von ATENA 2D. Wurde eine zufällig verteilte Vergleichsgröße zur Systemantwort definiert, so ist es möglich die zugehörige Zustandsfunktion zu ermitteln und den Zuverlässigkeitsindex zu bestimmen (Novák u. a., 2004, S. 4 ff.).

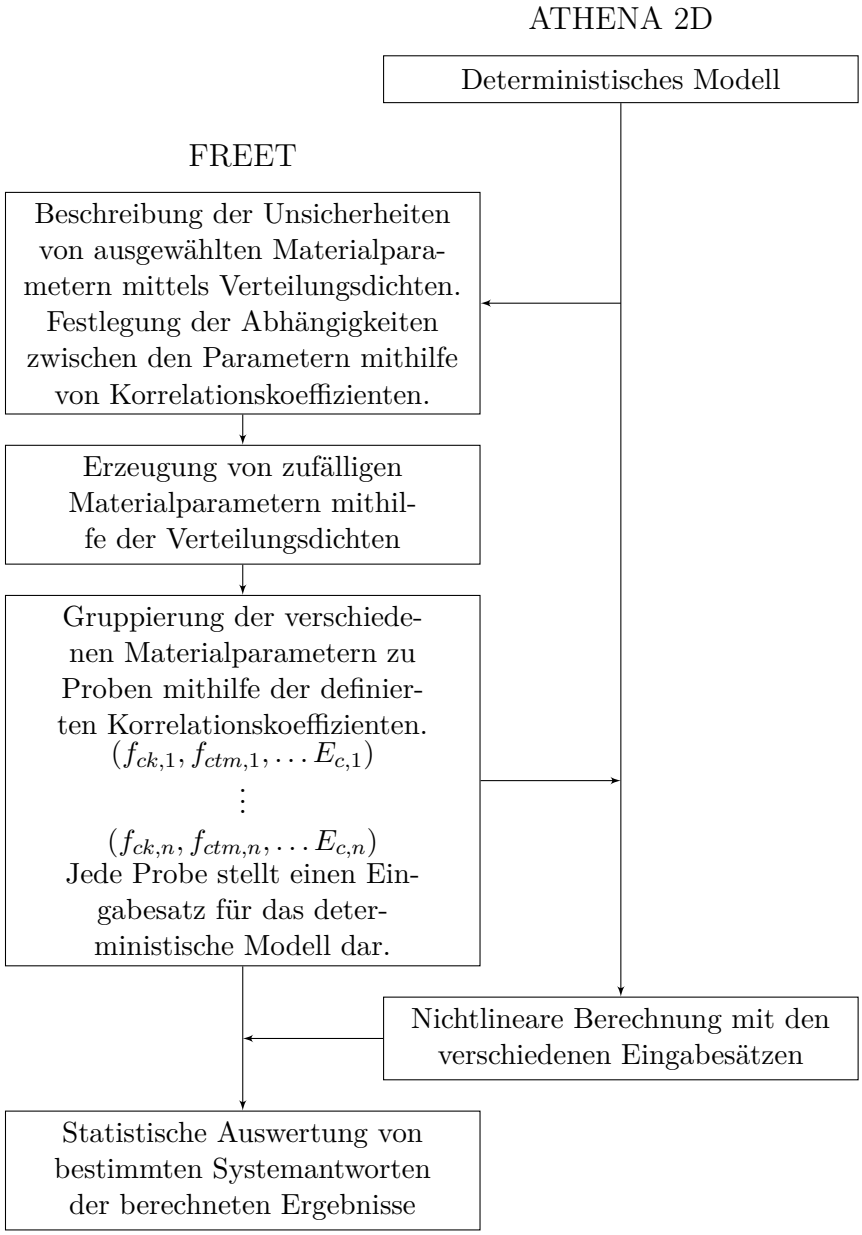

Bild 5.1.: Probabilistische Analyse mithilfe des FE-Programms ATENA 2D

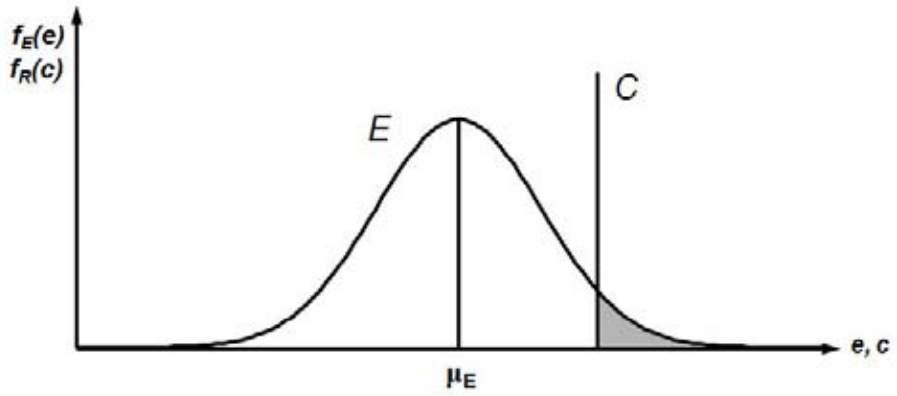

Bild 5.2.: Verteilungsdichte der Systemantwort E und Bemessungswert des Gebrauchstauglichkeitskriteriums C

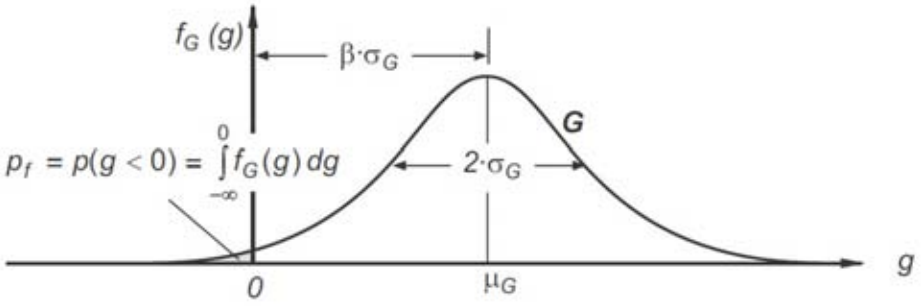

Bild 5.3.: Zustandsfunktion $G = C - E$ (aus: Zilch & Zehetmaier, 2006, S. 36)

Die nachfolgende Zuverlässigkeitsanalyse der Fassade bezieht sich auf die Einhaltung der Gebrauchstauglichkeit. Eine mit Unsicherheiten behaftete Systemantwort E steht einem maximal zulässigen Grenzwert der Systemantwort C gegenüber (Bild 5.3). Die Streuung der Systemantwort liegt in den Unsicherheiten der Eingangsgrößen wie Baustoffeigenschaften oder Beanspruchung. Wird eine passende Verteilungsfunktion zur Beschreibung der Systemanwort gefunden, so lässt sich über die Zustandsfunktion $G = C - E$ die Eintretenswahrscheinlichkeit einer Überschreitung des zulässigen Grenzwertes p_f oder der Zuverlässigkeitsindex β ermitteln. Beide Größen dienen zur Einschätzung der Zuverlässigkeit eines Tragwerkes. Die Zuverlässigkeit der Fassade wurde anhand der horizontalen Verschiebung sowie der Rissbreiten ermittelt. Streuende Eingangsgrößen waren die Baustoffeigenschaften des Betons sowie der Bewehrunggrad ρ (Tabelle 5.1). Die Streuungen im Bewehrungsgrad sollten Ungenauigkeiten in der Verlegung darstellen. Die Abhängigkeiten zwischen den Materialparametern wurde durch Korrelationskoeffizienten definiert (Tabelle 5.2).

Tabelle 5.1.: statistische Materialparameter zur Bestimmung der Zuverlässigkeit des Tragwerks (nach JCSS, 2002)

		PDF	MW	CV
Beton C30/37				
f_c	[MN/m^2]	Normal	38	0,07
E_c	[MN/m^2]	Lognormal	2.8300	0.06
f_{ct}	[MN/m^2]	Lognormal	2,9	0,10
G_f	[N/m]	Weibull	57,9	0,18
Bewehrung				
$\rho_{H,V}$	-	Rectangular	0,023	0,075

Tabelle 5.2.: Korrelationskoeffizienten zwischen den statistischen Parametern

	f_c	E_c	f_{ct}	G_f	ρ_H	ρ_V
f_c	1	-0,6	-0,8	-0,5	0	0
E_c	-0,6	1	0,6	0,6	0	0
f_{ct}	-0,8	0,6	1	0,6	0	0
G_f	-0,5	0,6	0,6	1	0	0
ρ_H	0	0	0	0	1	0
ρ_V	0	0	0	0	0	1

Aufgrund der langen Rechenzeiten des deterministischen Modells wurden sieben Proben als Eingangsgrößen randomisiert. Das verwendete numerische Modell stellt das Ergebnis der Optimierung aus Kapitel 4 dar. Um den Einfluss unterschiedlicher Blechdicken der Befestigungen auf die Zuverlässigkeit der Systemantworten zu berücksichtigen, wurden alle sieben Modelle für drei unterschiedliche Blechdicken berechnet. Als Blechdicken wurden 8mm, 12mm und 16mm gewählt. Die Systemantworten der 21 Berechnungen in ATENA 2D wurden anschließend getrennt nach verwendeter Blechdicke statistisch ausgewertet. Die Vergleichsgröße der Einwirkung stellt im Fall der Verschiebung die maximale Verformung in Längsrichtung der Fassade dar. Als Grenzwert des Gebrauchstauglichkeitskriteriums wurde eine Gesamtverschiebung der Fassade von 3mm und 4mm gewählt. Die maximale Verformung in Längsrichtung wurde mit 3mm vorgegeben, durfte aber auf keinen Fall 5mm überschreiten. Da die Überschreitungswahrscheinlichkeit bei einer zulässigen Verformung von 4mm schon sehr kleine Werte annimmt, wurde auf die Angabe der

Zuverlässigkeit bei einer zulässigen Verschiebung von 5mm verzichtet. Tabelle 5.3 zeigt die Eintretenswahrscheinlichkeit der Überschreitung und den Zuverlässigkeitsindex der größten horizontalen Verschiebung. Der Zielwert für den Zuverlässigkeitsindex für einen Bezugszeitraum von 50 Jahren liegt nach EN 1990, im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit, bei 1,5. Die Überschreitung einer maximalen Verformung von 3mm ist daher vor allem bei der Wahl einer Blechstärke von 8mm sehr wahrscheinlich.

Tabelle 5.3.: Überschreitungswahrscheinlichkeiten p_f und zugehörige Sicherheitsindizes β der maximalen Verschiebung in x-Richtung

	$\mu_R = 3$mm		$\mu_R = 4$mm	
Blechdicke[mm]	β	p_f	β	p_f
8	-1,10	8,64E-01	13,85	6,18E-44
12	1,34	9,02E-02	19,94	9,71E-89
16	3,77	8,29E-05	27,53	4,02E-167

Aufgrund der vereinfachten Modellierung der Bewehrung (Vernachlässigung der konstruktiven Zusatzbewehrung in den Fensterecken) wurde die zulässige Rissbreite in allen Modellen der Optimierung der Befestigungsmittel überschritten. Berechnungen von Teilausschnitten der Fassade unter Berücksichtigung von Zusatzbewehrungen konnten jedoch die Einhaltung der zulässigen Rissbreiten zeigen. Bei Verwendung der Mittelwerte der Materialparameter gilt die zulässige Rissbreite deshalb als eingehalten. Die Bestimmung des Zuverlässigkeitsindex oder der Überschreitungswahrscheinlichkeit der größten Rissbreite aus den Ergebnissen des 2D Modells ist aber nicht möglich. Um dennoch eine Aussage über den Einfluss der streuenden Eingangsgrößen auf die Rissbreiten zu bekommen, wurde nach einer Vergleichsgröße gesucht die das gesamte numerische Modell erfasst. Gewählt wurde die Summe aller Überschreitungen des Mittelwertes der Rissbreiten:

$$\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w_i \qquad \text{für alle Integrationspunkte n eines Modells} \tag{5.1}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} w_{\ddot{U},i} \qquad w_{\ddot{U},i} = \begin{cases} (w_i - \overline{w}) & \text{wenn } w_i \geq \overline{w}, \\ 0 & \text{wenn } w_i < \overline{w}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Der Mittelwert berechnet sich aus allen Rissbreiten der Integrationspunkte eines Modells. Alle Rissbreiten beziehen sich auf die letzte Laststufe des deterministi-

schen Modells. Es wurde angenommen, dass Rissbreiten unterhalb des Mittelwertes nur sehr unwahrscheinlich die einzuhaltende Rissbreite überschreiten. Als Maß für die Zuverlässigkeit der Einhaltung der Rissbreiten, infolge der Unsicherheiten der Materialparameter, wurde daher der Variationskoeffizient von X verwendet (Bild 5.4). Alle Auswertungen der Modelle mit unterschiedlichen Blechdicken zeigen eine kleine Streuung von X (Tabelle 5.4).

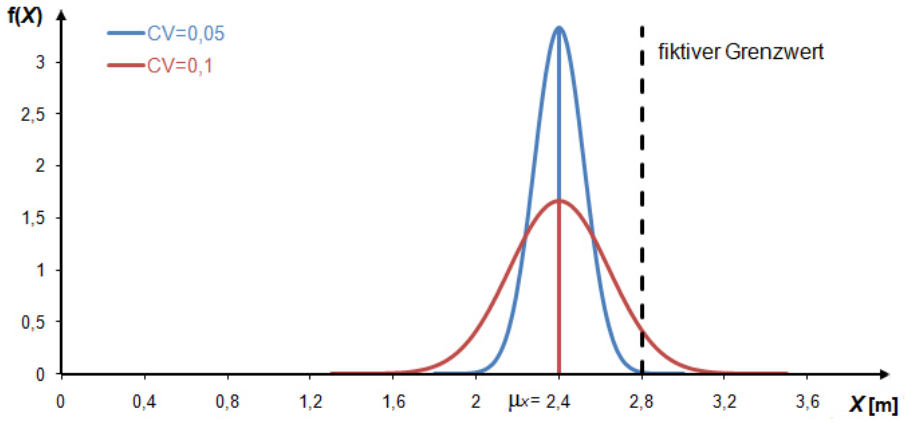

Bild 5.4.: Darstellung der Zuverlässigkeit durch den Variationskoeffizienten

Tabelle 5.4.: Parameter der Verteilungsdichte von X zur Abschätzung der Zuverlässigkeit

Blechdicke[mm]	$\overline{x}$[m]	s_x[m]	CV[-]
8	2,41	0,11	0,05
12	2,40	0,12	0,05
16	2,39	0,12	0,05

Die Sensitivität der Rissbreite in den Integrationspunkten zeigt Tabelle 5.5. Die Korrelationskoeffizienten der Materialparameter in Tabelle 5.5 beschreiben die Sensitivität. Hohe Korrelationskoeffizienten bedeuten eine starke Sensitivität der Rissbreite auf Änderungen des betreffenden Materialparameters. Bei positiven Vorzeichen der Koeffizienten sind die abhängigen Änderungen von Materialparameter und Rissbreite proportional zueinander. Bei negativen Vorzeichen verhalten sich die beiden Änderungen umgekehrt proportional. Den größten Einfluss auf die Rissbreite hat die Bewehrung in Längsrichtung. Die Vergrößerung des Bewehrungsgrades ist daher am wirkungsvollsten um die Rissbreite zu reduzieren (Novák u. a., 2004, S. 20).

Tabelle 5.5.: Sensitivität der Rissbreite w zu den statistischen Materialparametern

Parameter	Sensitivität
f_c	0,14
E_c	0,19
f_{ct}	0,13
G_f	0,24
ρ_H	-0,66
ρ_V	0,03

Die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsanalyse wurden auch dazu genutzt um die Verteilung von bestimmten Systemantworten im Laufe der Lastgeschichte zu untersuchen. Speziell wurde geprüft, ob die entsprechenden Systemantworten vor Versagen des Tragwerkes zwischen dem Mittelwert und dem 5% Fraktilwert liegen (Bild 5.5). Dadurch wurde versucht die Annahme in Červenka & Červenka (2006, S. 4) nachzuweisen, welche von einem stabilen Verlauf des Mittelwertes und der 5% Fraktile einer Systemantwort vor Versagen des Tragwerkes ausgeht. Die Hypothese bezieht sich dabei auf alle Laststufen des Lastprozesses vor dem Versagen und wurde mithilfe der horizontalen maximalen Verschiebung, der Spannung und der Rissbreite in bestimmten Integrations- oder Knotenpunkten untersucht. Bild 5.6 zeigt die Bestätigung der Hypothese im Fall der Verschiebungen im Elementknoten, alle Verschiebungsverläufe der Zuverlässigkeitsanalyse befinden sich dabei zwischen dem Verlauf von Mittelwert und 5% Fraktile.

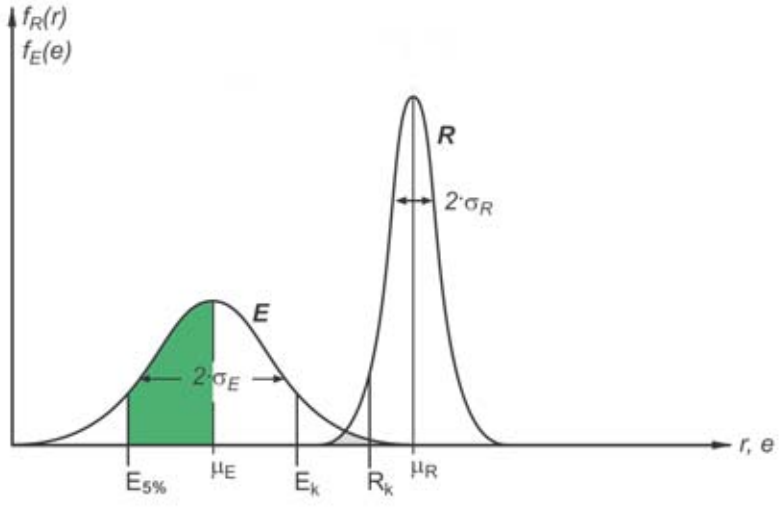

Bild 5.5.: grafische Darstellung der Hypothese

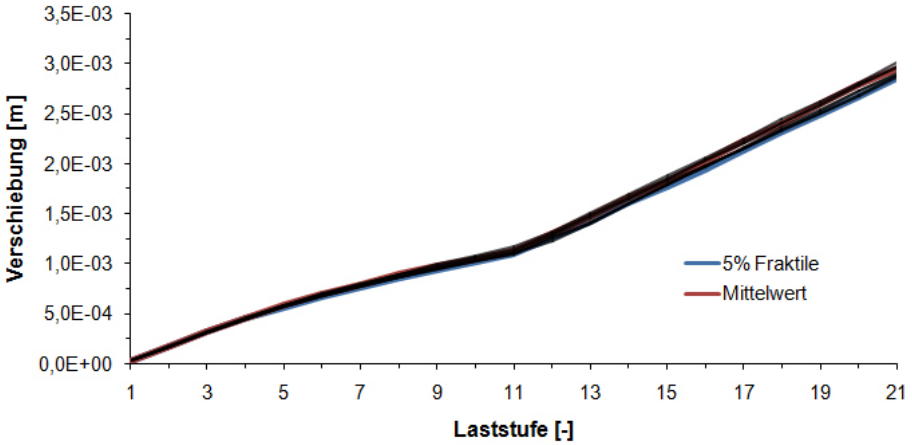

Bild 5.6.: Vergleich der Verformungsverläufe aus der Simulation mit dem Verformungsverlauf des Mittelwertes und der 5% Fraktile in einem Knotenpunkt

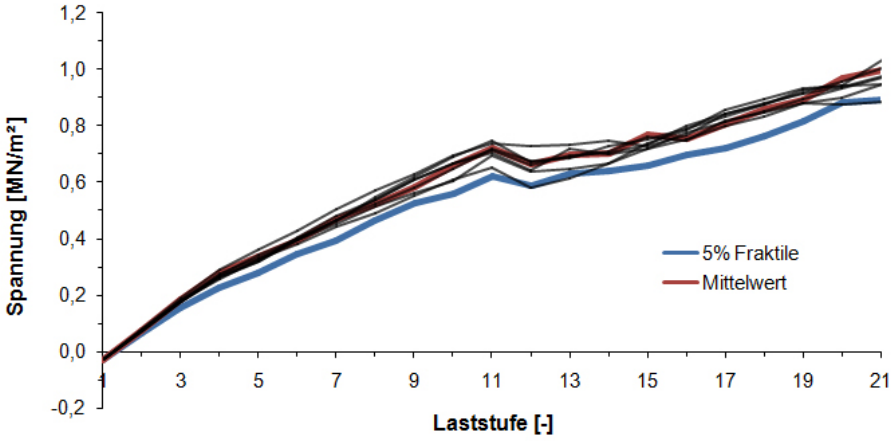

Bild 5.7.: Vergleich der Spannungsverläufe aus der Simulation mit dem Spannungsverlauf des Mittelwertes und der 5% Fraktile in einem Integrationspunkt

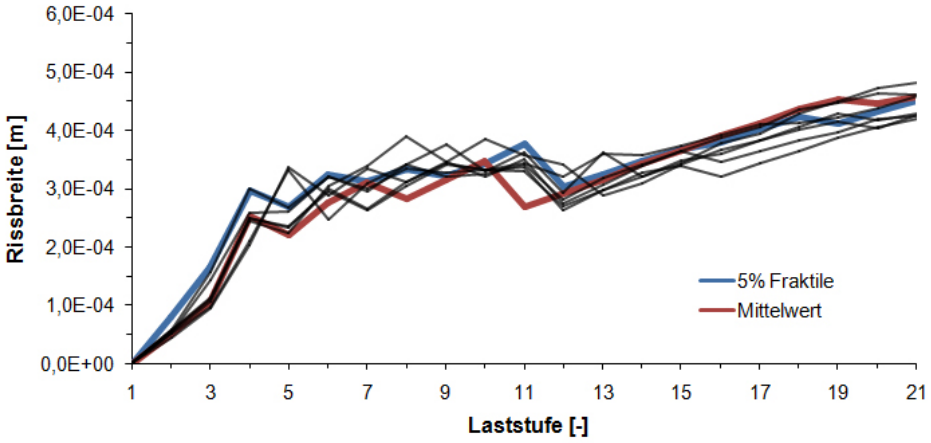

Bild 5.8.: Vergleich der Rissbreitenverläufe aus der Simulation mit dem Rissbreitenverlauf des Mittelwertes und der 5% Fraktile in einem Integrationspunkt

Für die Rissbreite und die Spannung im Integrationspunkt trifft die Hypothese nicht zu (Bilder 5.7 und 5.8). In beiden Diagrammen verlaufen die verschiedenen Ergebnisse der Simulation nicht innerhalb der Grenzen von Mittelwert und 5% Fraktile. Die Verschiebungen stellen im Gegensatz zu den Rissbreiten und den Spannungen einen globalen Vektor dar, da sie aus der Systemsteifigkeit und dem Vektor der äußeren Kräfte berechnet werden. Die Hypothese lässt sich auf Systemantworten eines globalen Vektors anwenden, während die Systemantworten, welche aus Berechnungen auf Elementebene hervorgehen, ein anderes Verhalten aufweisen.

6. Diskussion

Vorteile der Finiten Element Methode liegen in der Lösbarkeit von komplexen Strukturen, bei denen die klassischen Verfahren der Mechanik versagen. Die nichtlinearen Berechnungsmethoden erweitern das Fachgebiet der Finite Element Analyse, um realitätsnähere Aussagen über das wahre Tragverhalten einer Struktur zu erhalten. Die Darstellung des nichtlinearen Lösungsprozesses von Stahlbeton im zweidimensionalen Spannungszustand in Kapitel 3 zeigt nur einen Abriss des komplizierten Iterationsablaufes. Weiters bezieht er sich auf die angegebenen Quellen und kann aufgrund der unterschiedlichen Lösungswege der verschiedenen Anbieter von FEM-Programmen nicht als allgemein gültig angesehen werden. Ein wichtiges Anwendungsgebiet in der Finite Element Methode stellen Optimierungsverfahren dar, welche durch die ständig steigenden Rechenleistungen von Computern immer mehr an Bedeutung gewinnen. Optimierungsverfahren dienen zur möglichst effektiven Gestaltung von Strukturen, womit auch eine höhere Wirtschaftlichkeit in der späteren Durchführung der Konstruktion verbunden ist. Bei der Optimierung der Fassade wurde durch schrittweise Änderung versucht, die auftretenden Rissbreiten so gering als möglich zu halten. Das Ziel war die Vermeidung von Sammelrissen zur Limitierung von großen Verformungen(SLS) und zur Verbesserung der Dauerhaftigkeit. Eine gesuchte Anordnung von möglichst wenigen Befestigungsmittel sollte daher eine rissverteilende Wirkung verursachen. Die wirtschaftlichen Vorteile der Optimierung liegen in der Minimierung der Anzahl an Befestigungsmittel, welche einen wesentlichen Kostenfaktor der Konstruktion darstellen. Innerhalb der Optimierung wurde durch den Vergleich unterschiedlicher Blechanordnungen versucht, eine Ursache-Wirkungsbeziehung zwischen Blechpositionen und den Rissbildungen herzustellen. Bestimmte Blechpositionen konnten dann zur Verbesserung der Rissbildung in anderen Modellen übernommen werden. In den meisten Fällen konnte diese Übernahme, trotz der nichtlinearen Berechnung, Verbesserungen in der Rissbildung erzielen. Ein Problem stellte die vereinfachte Modellierung der Bewehrung aufgrund der langen Rechenzeiten der Modelle dar. Die zulässige Rissbreite konnte aus diesem Grund in keinem der Modelle der Optimierung vollständig eingehalten werden. Es war daher schwierig die rechnerischen Rissbildungen der unterschiedli-

chen Modelle zu beurteilen und einzustufen. Vor allem die optische Unterscheidung der Rissbildungen unterschiedlicher Modelle mithilfe der grafischen Ausgabe war oft nicht einfach. Zur besseren Einordnung der Modelle wurden Parameter entwickelt, welche die Unterschiede numerisch erfassen. Die Ermittlung der Parameter erfolgte durch die Auswertung der numerischen Ausgabe. Das Ergebnis der Optimierung ist eine gleichmäßig verteilte Rissbildung über die Oberfläche der Fassade. Die 31 Bleche der optimierten Befestigungsanordnung besitzen dabei unregelmäßige Abstände zueinander. Risskonzentrationen treten durch den Verzicht der konstruktiven Zusatzbewehrung vor allem in den Fensterecken auf. Unter Berücksichtigung der konstruktiven Zusatzbewehrung können diese Rissgruppen auf den einzuhaltenden Grenzwert der Rissbreite beschränkt werden. Die maximale Zwangsbeanspruchungskraft eines Bleches in horizontaler Richtung beträgt 753 kN. Die größte einzuleitende Kraft ergibt sich durch die Abtragung des Eigengewichts in vertikaler Richtung mit 863 kN. Das maximale Tragvermögen des Blechanschlusses wurde mit 1454 kN ermittelt. Versagen tritt dabei durch Plastizierung des Blechquerschnitts ein.

Da die Optimierung mit einer großen Anzahl an FE-Berechnungen verbunden ist und die Berechnungen nichtlinear durchgeführt wurden, war sie sehr zeitintensiv. Eine wesentliche Erleichterung wäre deshalb die Entwicklung eines Algorithmus, welcher die Optimierung automatisiert. Die zeitaufwendige Datenauswertung und Anpassung der Befestigungen würde damit entfallen.

Literaturverzeichnis

dm140108 Decreto Ministeriale 14 Gennaio 2008 „Norme tecniche per le costruzioni“ 32, 34, 42

JCSS Part 3. Resistance Models; Probabilistic Model Code Safety Formats for Design based on Non-linear Analysis, Mai 2002 65

Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden.* Berlin : Springer, 2002 15, 18, 19, 20, 22

Červenka, V. ; Červenka, J.: *Probabilistic Estimate of Global Safety Factor – Comparison of Safety Formats for Design based on Non-linear Analysis.* Prag : ČERVENKA CONSULTING Ltd., 2006 68

Červenka, V. ; Jendele, L. ; Červenka, J.: *ATENA Programm Documentation.* Prag : ČERVENKA CONSULTING Ltd., 2010 23, 26, 29, 30

Novák, D. ; Vořechovský, M. ; Rusina, R. ; Lehký, D.: *FREET Programm Documentation.* Brünn : ČERVENKA CONSULTING Ltd., 2004 62, 67

RWTH: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden.* Aachen : Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen 3, 4, 5, 8, 9, 12, 15, 18, 19, 20, 21, 22

Schnell, W. ; Gross, D. ; Hauger, W.: *Technische Mechanik 2.* Berlin : Springer, 1995 37

Werkle, Horst: *Finite Elemente in der Baustatik.* Wiesbaden : Vieweg, 2008 5, 7, 8, 23, 24, 25

Zilch, K. ; Zehetmaier, G.: *Bemessung im konstruktiven Betonbau.* Berlin : Springer, 2006 64

Anhang

A. Auszug der grafischen Ergebnisse der Optimierung

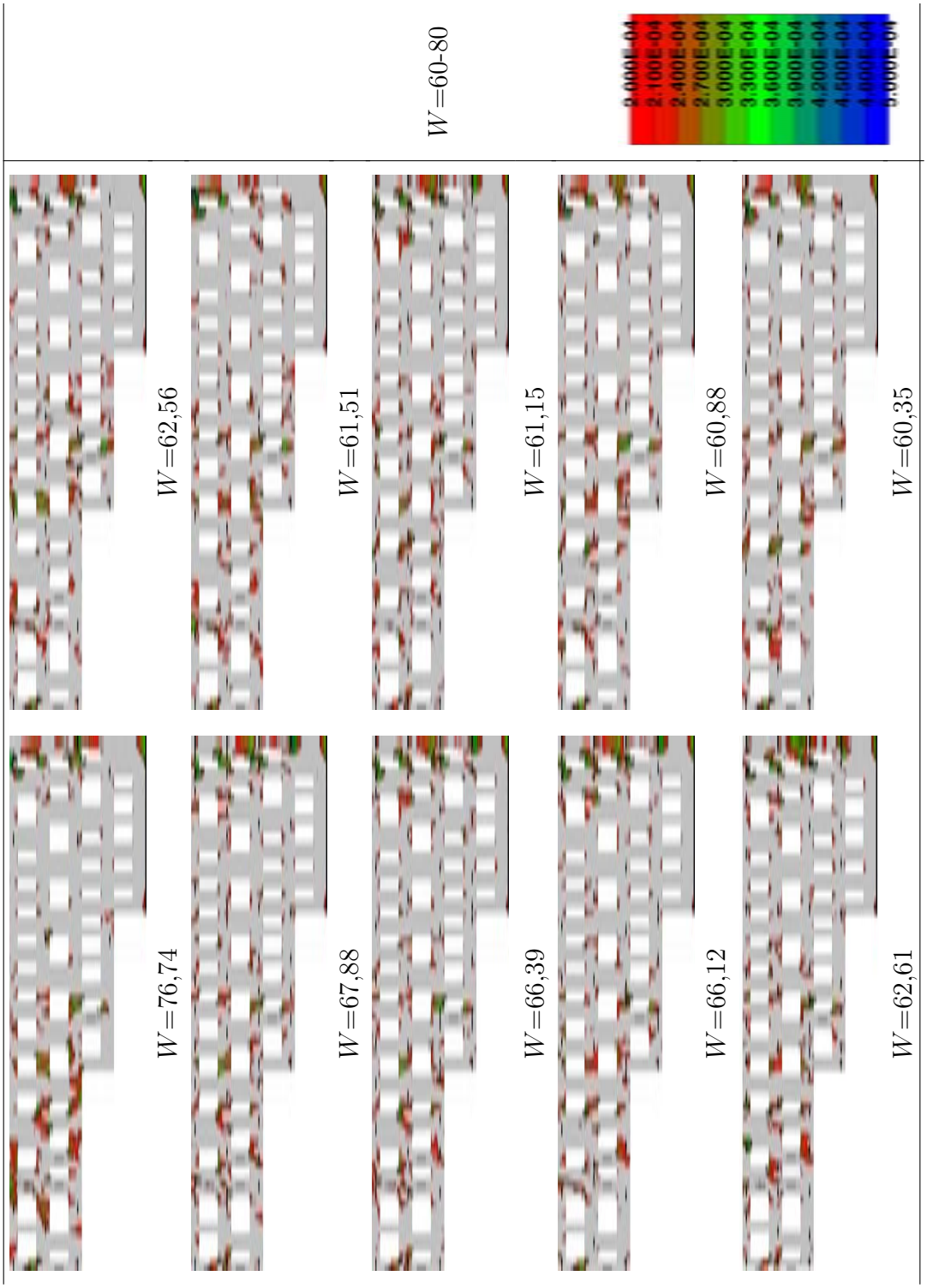

Bild A.1.: Entwicklung der Rissbildungen (Rissbreiten zwischen 2E-05m und 5E-05m) durch Variation der Befestigungsmittel

Bild A.1.: Entwicklung der Rissbildungen durch Variation der Befestigungsmittel

Bild A.1.: Entwicklung der Rissbildungen durch Variation der Befestigungsmittel

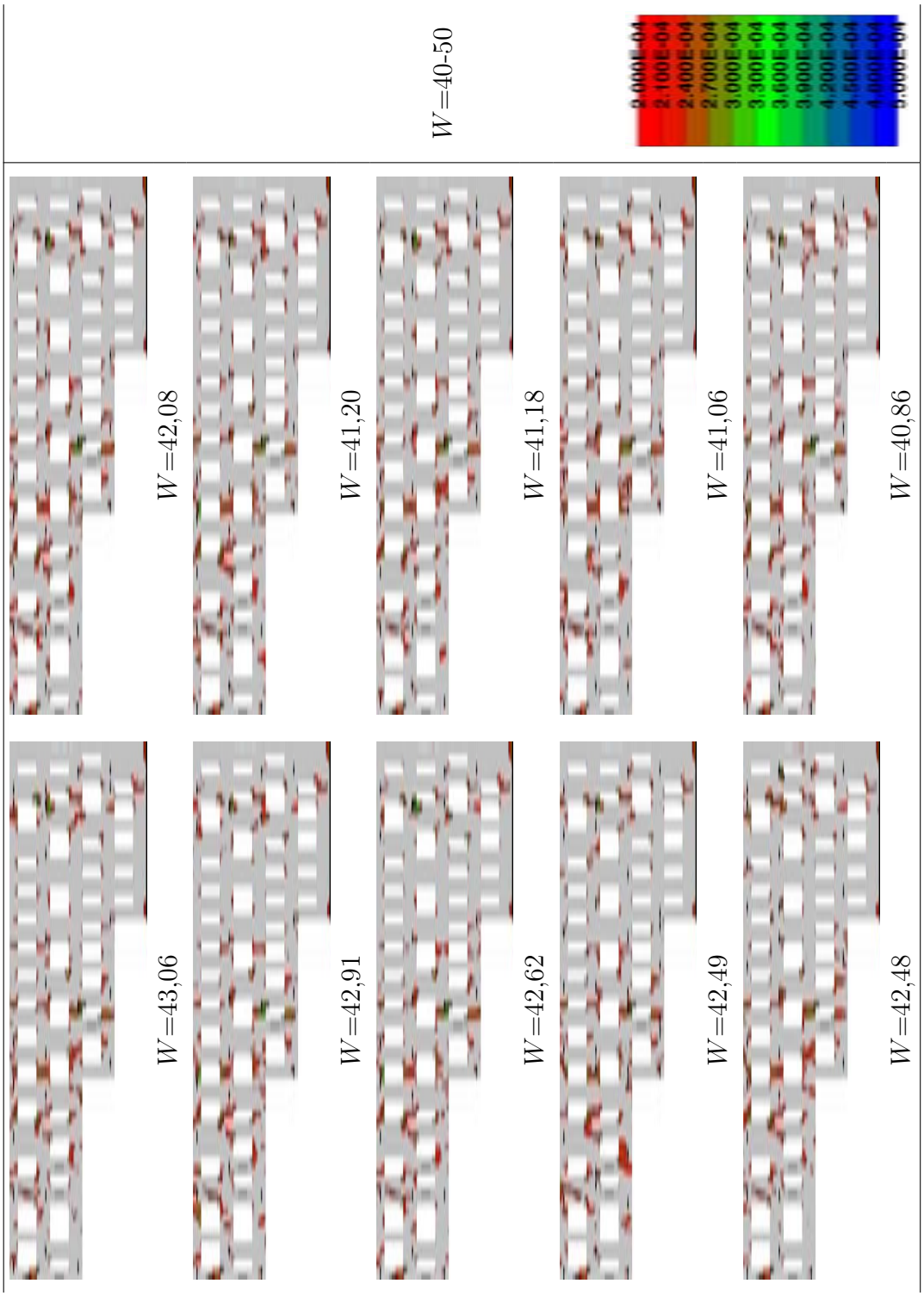

Bild A.2.: Entwicklung der Rissbildungen durch Variation der Befestigungsmittel (unter Verwendung von Gap-Elementen und Erhöhung des Bewehrungsgrades)

B. Programmierungen

Programmierung B.1: Berechnung der horizontalen Reaktionskraft des Blechanschlusses mit Daten aus ATENA 3D

```
Public Function Blechreaktion(Bereich1 As Range, Bereich2 As Range) As Variant
'zum Ausführen des Macros benötigt man die numerische Ausgabe der Knotenverschiebungen einer beliebigen Laststufe sowie die Ausgabe der Knotenreaktionen aller Laststufen des betreffenden Macroelements(Blech)
'die Daten der Verschiebung sind in die Zeile 1 der Spalte A einzufügen
'die Daten der Blechreaktionskräfte sind bei Laststufe 1 beginnend ab Spalte G alle 5 Spalten jeweils in die erste Zeile einzufügen
 Dim i As Variant, b As Variant, c As Variant
  For Each b In Bereich1
   If b.Offset(0, 1) = 7 * 10 ^ -4 Then
'das Programm sucht alle Knoten innerhalb der Verschiebungsdaten auf die eine Zwangsverschiebung einwirkt
'7*10^-4 entspricht dabei der Zwangsverschiebung
    For Each c In Bereich2
     If c = b Then
      i = i + c.Offset(0, 1)
'innerhalb der Knotenreaktionsdaten einer Laststufe werden alle Knoten mit Zwangsverschiebung addiert
      Exit For
     End If
    Next
   End If
  Next
 HForce = i
End Function
```

Programmierung B.2: Berechnung der horizontalen Reaktionskraft des Blechanschlusses mit Daten aus ATENA 3D

```
Sub Reaktionsauslöser()
'das Macro dient zum Ausführen von Programmierung A.1
 Dim n As Integer
 Dim i As Integer
 Dim hh As Integer
 hh = 20
'hh entspricht der Anzahl der Laststufen der Knotenreaktionsdaten
 For n = 1 To (hh - 1) * 5 + 1 Step 5
  Cells(1048576, 6 + n).Select
  Selection.End(xlUp).Select
  Selection.Offset(-3, 0).Select
  Range(Selection, Cells(6, 6 + n)).Select
  i = i + 1
  Cells(1 + i, 5) = HForce(Range("A6:A1393"), Selection)
 'Range("A6:A1393") entspricht dem Tabellenbereich der Verschiebungsknoten
 'die Ausgabe erfolgt in Spalte E ab Zeile 1, ausgegeben werden alle Blechreaktionskräfte der Laststufen, aufsteigend sortiert nach Laststufen
 Next
 Cells(1, 5) = "Blechreaktionskräfte"
End Sub
```

Programmierung B.3: Berechnung der horizontalen Federkräfte mit Daten aus ATENA 2D

```
Sub hFederkraft()
'zum Ausführen des Macros benötigt man die numerische Ausgabe der Knoten und Linien unter Input Data sowie die Ausgabe der Partial Reactions(unter Nodes) und Reference Nodal Coordinates der jeweiligen Laststufe unter Results
'das Programm sucht zuerst für jede Federlinie die Knoten innerhalb der Linie und summiert anschließend die Partial Reactions der Knoten zu Federkräfte
Dim h As Long
Dim hr() As Long
Dim cel As Variant
Dim n As Integer
Dim fe() As Double
Dim ce As Variant
Dim cell As Variant
Dim a As Double
Dim hh() As Double
Dim hu() As Variant
Dim i As Double
Dim o As Double
Dim m As Long
Dim sp As Long
Dim k As Integer
k = 1
'k bestimmt die Spalte der eingefügten Daten(die Spaltennummerierung startet bei Spalte A und endet bei Spalte XFD)
h = 0
ReDim hr(1 To 4, 1 To 2)
Cells(1048576, k).Select
Selection.End(xlUp).Select
Selection.Offset(-3, 0).Select
Range(Selection, Cells(1, k)).Select
For Each cel In Selection
 h = h + 1
Next
For n = 1 To 3
 i = 0
 For Each cel In Selection
  i = i + 1
  If n = 1 Then
   If Val(Trim(Left(cel, 5))) = 1 Then
    Exit For
   End If
  ElseIf n = 2 Then
   If Mid(cel, 7, 4) = "Line" Then
    Exit For
   End If
  ElseIf n = 3 Then
   If Trim(Right(cel, 5)) = "lin." Then
    Exit For
   End If
  End If
 Next
 For m = i To h
  If Cells(m, k) = Empty Then
   Exit For
  End If
 Next
 hr(n, 1) = i
 hr(n, 2) = m - 1
Next
m = 0
n = 0
For Each cel In Range(Cells(hr(3, 1), k), Cells(hr(3, 2), k))
 If Mid(cel, 11, 1) = "L" And Mid(cel, 49, 2) = "X+" Then
  n = n + 1
 End If
Next
ReDim fe(1 To n, 1 To 4)
For Each cel In Range(Cells(hr(3, 1), k), Cells(hr(3, 2), k))
 If Mid(cel, 11, 1) = "L" And Mid(cel, 49, 2) = "X+" Then
```

```
66      m = m + 1
67      fe(m, 1) = Val(Trim(Left(cel, 5)))
68      For Each ce In Range(Cells(hr(2, 1), k), Cells(hr(2, 2), k))
69       If Val(Trim(Left(ce, 5))) = Val(Trim(Left(cel, 5))) Then
70         For Each cell In Range(Cells(hr(1, 1), k), Cells(hr(1, 2), k))
71           If Val(Trim(Left(cell, 5))) = Val(Trim(Mid(ce, 11, 10))) Then
72            fe(m, 2) = Val(Trim(Mid(cell, 6, 12)))
73           End If
74           If Val(Trim(Left(cell, 5))) = Val(Trim(Mid(ce, 21, 6))) Then
75            fe(m, 3) = Val(Trim(Mid(cell, 6, 12)))
76            fe(m, 4) = Val(Trim(Right(cell, 12)))
77           End If
78         Next
79         Exit For
80        End If
81       Next
82    End If
83  Next
84  For i = 1 To h
85   If Val(Trim(Mid(Cells(h - i + 1, k), 7, 10))) = fe(1, 2) And Val(Trim(Right(Cells(h - i + 1, k)
         , 11))) = fe(1, 4) Then
86      a = a + 1
87      If a = 2 Then
88        sp = Val(Trim(Left(Cells(h - i + 1, k), 5)))
89        Exit For
90      End If
91   End If
92  Next
93  i = 0
94  For Each cel In Selection
95   i = i + 1
96   If Val(Trim(Left(cel, 5))) = sp Then
97    Exit For
98   End If
99  Next
100 For a = i To h
101  If Val(Trim(Left(Cells(a, k), 5))) = 1 Then
102   Exit For
103  End If
104 Next
105 hr(4, 1) = i
106 hr(4, 2) = a - 1
107 ReDim hh(1 To n + 1, 1 To 3)
108 ReDim hu(1 To n + 1, 1 To 3)
109 For r = 1 To n
110 o = 0
111 m = 0
112    If fe(r, 2) < fe(r, 3) Then
113     a = fe(r, 2)
114     i = fe(r, 3)
115    Else
116     a = fe(r, 3)
117     i = fe(r, 2)
118    End If
119    For Each ce In Range(Cells(hr(4, 2) + sp, k), Cells(h, k))
120      If Val(Trim(Mid(ce, 7, 10))) >= a And Val(Trim(Mid(ce, 7, 10))) <= i And Val(Trim(Right(ce,
           11))) = fe(r, 4) Then
121        For Each cell In Range(Cells(hr(4, 1), k), Cells(hr(4, 2) - 6, k))
122          If Val(Trim(Left(cell, 5))) = Val(Trim(Left(ce, 5))) And Val(Trim(Right(cell, 11))) = 0
                 Then
123            o = o + Val(Trim(Mid(cell, 7, 10)))
124            m = m + 1
125            Exit For
126          End If
127        Next
128       End If
129    Next
130    hh(r + 1, 1) = fe(r, 1)
131    hh(r + 1, 2) = o
132    hh(r + 1, 3) = m
133 Next
134 n = n + 1
135 For h = 2 To n
```

```
136   For m = 2 To n
137     i = 0
138     For a = 2 To n
139       If Abs(hh(m, 2)) >= Abs(hh(a, 2)) Then
140         i = i + 1
141       End If
142     Next
143     If i = n + 1 - h Then
144       hu(h, 1) = hh(m, 1)
145       hu(h, 2) = hh(m, 2)
146       hu(h, 3) = hh(m, 3)
147     End If
148   Next
149 Next
150 hu(1, 1) = "Liniennr."
151 hu(1, 2) = "Federkraft[MN]"
152 Range(Cells(1, k + 3), Cells(n, k + 4)) = hu
153 'die Ausgabe befindet sich rechts neben den Daten und beginnt bei Zeile 1, die Federkräfte
        werden dabei absteigend nach dem Absolutbetrag sortiert und neben der zugehörigen
        Liniennummer des Modells ausgegeben
154 End Sub
```

Programmierung B.4: Berechnung der vertikalen Federkräfte mit Daten aus ATENA 2D

```
1  Sub vFederkraft()
2  'zum Ausführen des Macros benötigt man die numerische Ausgabe der Knoten und Linien unter Input
       Data sowie die Ausgabe der Partial Reactions(unter Nodes) und Reference Nodal Coordinates
       der jeweiligen Laststufe unter Results
3  'das Programm sucht zuerst für jede Federlinie die Knoten innerhalb der Linie und summiert
       anschließend die Partial Reactions der Knoten zu Federkräfte
4  Dim h As Long
5  Dim hr() As Long
6  Dim cel As Variant
7  Dim n As Integer
8  Dim fe() As Double
9  Dim ce As Variant
10 Dim cell As Variant
11 Dim a As Double
12 Dim hh() As Double
13 Dim hu() As Variant
14 Dim i As Double
15 Dim o As Double
16 Dim m As Long
17 Dim sp As Long
18 Dim k As Integer
19 k = 1
20 'k bestimmt die Spalte der eingefügten Daten(die Spaltennummerierung startet bei Spalte A und
       endet bei Spalte XFD)
21 h = 0
22 ReDim hr(1 To 4, 1 To 2)
23 Cells(1048576, k).Select
24 Selection.End(xlUp).Select
25 Selection.Offset(-3, 0).Select
26 Range(Selection, Cells(1, k)).Select
27 For Each cel In Selection
28  h = h + 1
29 Next
30 For n = 1 To 3
31  i = 0
32  For Each cel In Selection
33    i = i + 1
34    If n = 1 Then
35     If Val(Trim(Left(cel, 5))) = 1 Then
36      Exit For
37     End If
38    ElseIf n = 2 Then
39     If Mid(cel, 7, 4) = "Line" Then
40      Exit For
41     End If
42    ElseIf n = 3 Then
```

```
43      If Trim(Right(cel, 5)) = "lin." Then
44       Exit For
45      End If
46     End If
47    Next
48    For m = i To h
49     If Cells(m, k) = Empty Then
50      Exit For
51     End If
52    Next
53    hr(n, 1) = i
54    hr(n, 2) = m - 1
55  Next
56  m = 0
57  n = 0
58  For Each cel In Range(Cells(hr(3, 1), k), Cells(hr(3, 2), k))
59   If Mid(cel, 11, 1) = "L" And Mid(cel, 49, 2) = "Y+" Then
60    n = n + 1
61   End If
62  Next
63  ReDim fe(1 To n, 1 To 4)
64  For Each cel In Range(Cells(hr(3, 1), k), Cells(hr(3, 2), k))
65   If Mid(cel, 11, 1) = "L" And Mid(cel, 49, 2) = "Y+" Then
66     m = m + 1
67     fe(m, 1) = Val(Trim(Left(cel, 5)))
68     For Each ce In Range(Cells(hr(2, 1), k), Cells(hr(2, 2), k))
69      If Val(Trim(Left(ce, 5))) = Val(Trim(Left(cel, 5))) Then
70        For Each cell In Range(Cells(hr(1, 1), k), Cells(hr(1, 2), k)) 'Bereich der Knotennummern
71          If Val(Trim(Left(cell, 5))) = Val(Trim(Mid(ce, 11, 10))) Then
72           fe(m, 2) = Val(Trim(Right(cell, 12)))
73          End If
74          If Val(Trim(Left(cell, 5))) = Val(Trim(Mid(ce, 21, 6))) Then
75           fe(m, 3) = Val(Trim(Right(cell, 12)))
76           fe(m, 4) = Val(Trim(Mid(cell, 6, 12)))
77          End If
78        Next
79        Exit For
80       End If
81      Next
82    End If
83  Next
84  For i = 1 To h
85   If Val(Trim(Mid(Cells(h - i + 1, k), 7, 10))) = fe(1, 4) And Val(Trim(Right(Cells(h - i + 1, k)
        , 11))) = fe(1, 2) Then
86     a = a + 1
87     If a = 2 Then
88       sp = Val(Trim(Left(Cells(h - i + 1, k), 5)))
89       Exit For
90     End If
91   End If
92  Next
93  i = 0
94  For Each cel In Selection
95   i = i + 1
96   If Val(Trim(Left(cel, 5))) = sp Then
97    Exit For
98   End If
99  Next
100 For a = i To h
101  If Val(Trim(Left(Cells(a, k), 5))) = 1 Then
102   Exit For
103  End If
104 Next
105 hr(4, 1) = i
106 hr(4, 2) = a - 1
107 ReDim hh(1 To n + 1, 1 To 3)
108 ReDim hu(1 To n + 1, 1 To 3)
109 For r = 1 To n
110 o = 0
111 m = 0
112   If fe(r, 2) < fe(r, 3) Then
113    a = fe(r, 2)
114    i = fe(r, 3)
```

```
115     Else
116       a = fe(r, 3)
117       i = fe(r, 2)
118     End If
119     For Each ce In Range(Cells(hr(4, 2) + sp, k), Cells(h, k))
120       If Val(Trim(Right(ce, 11))) >= a And Val(Trim(Right(ce, 11))) <= i And Val(Trim(Mid(ce, 7,
              10))) = fe(r, 4) Then
121         For Each cell In Range(Cells(hr(4, 1), k), Cells(hr(4, 2) - 6, k))
122           If Val(Trim(Left(cell, 5))) = Val(Trim(Left(ce, 5))) And Val(Trim(Mid(cell, 7, 10))) = 0
                  Then
123             o = o + Val(Trim(Right(cell, 11)))
124             m = m + 1
125             Exit For
126           End If
127         Next
128       End If
129     Next
130     hh(r + 1, 1) = fe(r, 1)
131     hh(r + 1, 2) = o
132     hh(r + 1, 3) = m
133   Next
134   n = n + 1
135   For h = 2 To n
136     For m = 2 To n
137       i = 0
138       For a = 2 To n
139         If Abs(hh(m, 2)) >= Abs(hh(a, 2)) Then
140           i = i + 1
141         End If
142       Next
143       If i = n + 1 - h Then
144         hu(h, 1) = hh(m, 1)
145         hu(h, 2) = hh(m, 2)
146         hu(h, 3) = hh(m, 3)
147       End If
148     Next
149   Next
150   hu(1, 1) = "Liniennr."
151   hu(1, 2) = "Federkraft[MN]"
152   Range(Cells(1, k + 6), Cells(n, k + 7)) = hu
153   'die Ausgabe befindet sich rechts neben den Daten und beginnt bei Zeile 1, die Federkräfte
          werden dabei absteigend nach dem Absolutbetrag sortiert und neben der zugehörigen
          Liniennummer des Modells ausgegeben
154   End Sub
```

Programmierung B.5: Berechnung der Summe von Rissbreitenüberschreitungen als Kriterium zur Einstufung der FE-Modelle aus ATENA 2D

```
1   Sub Riss()
2   'zum Ausführen des Macros benötigt man die numerische Ausgabe der Rissbreiten in den
        Integrationspunkten der letzten Laststufe
3   Dim h As Integer
4   Dim hh As Integer
5   Dim m As Long
6   Dim i As Double
7   Dim dat() As Double
8   Dim datt() As Double
9   hh = 26
10  'hh entspricht der Anzahl der zu vergleichenden FE- Modelle
11  'die Daten der Modelle sind dabei bei Spalte A beginnend im Abstand von 5 Spalten, jeweils bei
        der ersten Zeile beginnend einzufügen (jedes Modell enspricht einer Spalte)
12  ReDim dat(1 To hh, 1 To 2)
13  ReDim datt(1 To hh, 1 To 2)
14  For n = 1 To (hh - 1) * 5 + 1 Step 5
15    Cells(1048576, n).Select
16    Selection.End(xlUp).Select
17    Selection.Offset(-3, 0).Select
18    Range(Selection, Cells(14, n)).Select
19    h = h + 1
20    m = 0
21    i = 0
```

```
22   For Each rr In Selection
23    If Val(Trim(Left(Right(rr, 22), 10))) >= 0.0002 Then
24     i = i + ((Val(Trim(Left(Right(rr, 22), 10))) - 0.0001999))
25   'als Maßzahl wird die Summe der Überschreitungen des Rissbreiten-Grenzwertes von 0.2mm für jedes
         Modell berechnet
26    End If
27    m = m + 1
28   Next
29   dat(h, 1) = Cells(1, n + 1)
30   'die Bezeichnung des Modells befindet sich eine Spalte rechts von den Daten des Modells in Zeile
         1
31   dat(h, 2) = i / m * 10 ^ 7
32   'um die Maßzahlen der verschiedenen Modelle vergleichbar zu machen wird jede Summe auf die
       Anzahl aller Integrationspunkte im Modell bezogen
33  Next
34  For n = 1 To h
35   For m = 1 To h
36    i = 0
37    For a = 1 To h
38     If dat(m, 2) <= dat(a, 2) Then
39      i = i + 1
40     End If
41    Next
42    If i = h + 1 - n Then
43     datt(n, 1) = dat(m, 1)
44     datt(n, 2) = dat(m, 2)
45    End If
46   Next
47  Next
48  Cells(14, 4) = "Modelle"
49  Cells(14, 5) = "Summe der Rissbreitenüberschreitungen"
50  Range(Cells(15, 4), Cells(14 + h, 5)) = datt
51  'die Ausgabe befindet sich in Spalte D und beginnt bei Zeile 14, die Summen werden in
       aufsteigender Reihenfolge neben den zugehörigen Modellbezeichnung ausgegeben
52  End Sub
```

Programmierung B.6: Unterteilung der FE-Modelle aus ATENA 2D in Rasterelemente zur lokalen Vergleichbarkeit des Ausmaßes der Rissbreiten

```
1  Sub Rissvergleich1()
2  'zum Ausführen des Macros benötigt man die numerische Ausgabe der Rissbreiten und
       Referenzkoordinaten in den Integrationspunkten der jeweiligen Laststufe
3  Dim n As Integer
4  Dim m As Long
5  Dim i As Double
6  Dim j As Integer
7  Dim a As Integer
8  Dim k As Long
9  Dim l As Long
10 Dim b As Integer
11 Dim x1 As Double
12 Dim y1 As Double
13 Dim y2 As Double
14 Dim dat() As Double
15 Dim c As Integer
16 Dim ff() As Double
17 Dim f5() As Variant
18 Dim f6() As Double
19 Dim hh As Integer
20   hh = 4
21 'hh entspricht der Anzahl der zu vergleichenden FE - Modelle
22 'die Daten der Modelle sind bei Spalte A beginnend im Abstand von 5 Spalten jeweils in die erste
       Zeile einzufügen
23 'jedes Modell wird vertikal in drei Rechtecke mit Rasterelementen unterteilt, die Variablen a
       und b legen die Anzahl der Rasterelemente in horizontaler und vertikaler Richtung für das
       dazugehörige Rechteck fest
24 'insgesamt wird jedes Modell in 190 Rasterelemente unterteilt
25 'jedem Rasterelement werden anschließend die Integrationspunkte lagemäßig zugeordnet
26  ReDim f5(1 To 5, 1 To 3)
```

```
27  For n = 1 To (hh - 1) * 5 + 1 Step 5
28   ReDim ff(1 To 190, 1 To 2)
29   j = 0
30   Cells(1048576, n).Select
31   Selection.End(xlUp).Select
32   Selection.Offset(-3, 0).Select
33   Range(Selection, Cells(14, n)).Select
34   k = 0
35   For Each r In Selection
36    k = k + 1
37    If Left(r, 5) = "Units" Then
38     Exit For
39    End If
40   Next
41   For r = 1 To 3
42    If r = 1 Then
43     a = 32
44     b = 4
45     x1 = 0
46     y1 = 16.29
47     y2 = 7.66
48    ElseIf r = 2 Then
49     a = 20
50     b = 2
51     x1 = 24.01
52     y1 = 7.66
53     y2 = 3.82
54    Else
55     a = 11
56     b = 2
57     x1 = 43.05
58     y1 = 3.82
59     y2 = 0
60    End If
61    For u = 1 To b
62     m = 0
63     For l = 1 To k - 6
64      If Val(Trim(Mid(Cells(13 + k + l, n), 19, 10))) > x1 And Val(Trim(Mid(Cells(13 + k + l, n)
            , 19, 10))) < 64.315 And Val(Trim(Right(Cells(13 + k + l, n), 11))) >= y1 - (y1 - y2)
            / b * (u) And Val(Trim(Right(Cells(13 + k + l, n), 11))) < y1 - (y1 - y2) / b * (u -
            1) Then
65       m = m + 1
66      End If
67     Next
68     i = 0
69     ReDim dat(1 To m, 1 To 2)
70     For l = 1 To k - 6
71      If Val(Trim(Mid(Cells(13 + k + l, n), 19, 10))) > x1 And Val(Trim(Mid(Cells(13 + k + l, n)
            , 19, 10))) < 64.315 And Val(Trim(Right(Cells(13 + k + l, n), 11))) >= y1 - (y1 - y2)
            / b * (u) And Val(Trim(Right(Cells(13 + k + l, n), 11))) < y1 - (y1 - y2) / b * (u -
            1) Then
72       i = i + 1
73       dat(i, 1) = Val(Trim(Left(Right(Cells(13 + l, n), 22), 10)))
74       dat(i, 2) = Val(Trim(Mid(Cells(13 + k + l, n), 19, 10)))
75      End If
76     Next
77     For g = 1 To a
78      j = j + 1
79      i = 0
80      c = 0
81      For l = 1 To m
82       If dat(l, 2) > x1 + (64.315 - x1) / a * (g - 1) And dat(l, 2) <= x1 + (64.315 - x1) / a *
             (g) Then
83        c = c + 1
84       End If
85       If dat(l, 2) > x1 + (64.315 - x1) / a * (g - 1) And dat(l, 2) <= x1 + (64.315 - x1) / a *
             (g) And dat(l, 1) >= 0.0002 Then
86        i = i + (dat(l, 1) * 10 ^ 4) - 1.999
87       End If
88      Next
89      If i = 0 Then
90       ff(j, 2) = i
91      Else
```

```
92          ff(j, 2) = i / c
93        End If
94        ff(j, 1) = j
95       Next
96      Next
97     Next
98  'berechnet wird die Summe der Überschreitungen des Rissbreiten-Grenzwertes von 0.2mm, der im
        Element befindlichen Integrationspunkte mit Rissbreiten über 0.2mm
99  'die Summe wird anschließend auf die Anzahl an Integrationspunkten im Element bezogen um
        Fensteraussparungen zu berücksichtigen
100    If n = 1 Then
101     ReDim f6(1 To 190, 1 To 2)
102                   c = 0
103     For b = 1 To 190
104      For m = 1 To 190
105       i = 0
106        For a = 1 To 190
107         If ff(m, 2) >= ff(a, 2) Then
108          i = i + 1
109         End If
110        Next
111        If i = 190 + 1 - b Then
112                              c = c + 1
113         f6(c, 1) = ff(m, 1)
114         f6(c, 2) = ff(m, 2)
115        End If
116       Next
117      Next
118      For b = 1 To 5
119       f5(b, 1) = Cells(1, n + 1)
120  'die Bezeichnung des Modells befindet sich eine Spalte rechts von den Daten des Modells in Zeile
        1
121       f5(b, 2) = f6(b, 1)
122       f5(b, 3) = f6(b, 2)
123      Next
124    End If
125    If n > 1 Then
126     For i = 1 To 5
127      If f5(i, 3) > ff(f5(i, 2), 2) Then
128       f5(i, 1) = Cells(1, n + 1)
129       f5(i, 3) = ff(f5(i, 2), 2)
130      End If
131     Next
132    End If
133   Next
134  Cells(13, 4) = "Modell"
135  Cells(13, 5) = "Rasterelementnr."
136  Range(Cells(14, 4), Cells(13 + 5, 5)) = f5
137  'das Programm ermittelt zuerst die 5 größten Summen der Rasterelemente innerhalb des ersten
        Modells(Modelldaten in Spalte A) und vergleicht diese mit den Summen der gleichen Elemente
        in den anderen Modellen
138  'ausgegeben werden die 5 Nummern der Rasterelemente in Spalte D beginnend ab Zeile 13 sowie
        rechts daneben die Modellbezeichnungen der Modelle mit den geringsten Summen in den
        dazugehörigen Elementen
139 End Sub
```

Programmierung B.7: Unterteilung der FE - Modelle aus ATENA 2D in Rasterelemente zur lokalen Vergleichbarkeit des Ausmaßes der Rissbreiten

```
1  Sub Rissvergleich2()
2   'zum Ausführen des Macros benötigt man die numerische Ausgabe der Rissbreiten und
        Referenzkoordinaten in den Integrationspunkten der jeweiligen Laststufe
3  Dim n As Integer
4  Dim m As Long
5  Dim i As Double
6  Dim j As Integer
7  Dim a As Integer
8  Dim k As Long
9  Dim l As Long
```

```
Dim b As Integer
Dim x1 As Double
Dim y1 As Double
Dim y2 As Double
Dim dat() As Double
Dim c As Integer
Dim ff() As Double
Dim f1() As Double
Dim f2() As Double
Dim f3() As Double
Dim f4() As Double
Dim hh As Integer
  hh = 2
'die Anzahl der zu vergleichenden FE - Modelle ist 2
'die Daten der Modelle sind in Zeile 1 der Spalten A und F einzufügen, die Daten des Modells mit der kleineren Summe der Rissbreitenüberschreitungen ist in Spalte F einzufügen
'jedes Modell wird vertikal in drei Rechtecke mit Rasterelementen unterteilt, die Variablen a und b legen die Anzahl der Rasterelemente in horizontaler und vertikaler Richtung für das dazugehörige Rechteck fest
'insgesamt wird jedes Modell in 190 Rasterelemente unterteilt
'jedem Rasterelement werden anschließend die Integrationspunkte lagemäßig zugeordnet
 ReDim f5(1 To 5, 1 To 3)
 For n = 1 To (hh - 1) * 5 + 1 Step 5
  ReDim ff(1 To 190, 1 To 2)
  j = 0
  Cells(1048576, n).Select
  Selection.End(xlUp).Select
  Selection.Offset(-3, 0).Select
  Range(Selection, Cells(14, n)).Select
  k = 0
  For Each r In Selection
   k = k + 1
   If Left(r, 5) = "Units" Then
    Exit For
   End If
  Next
  For r = 1 To 3
   If r = 1 Then
    a = 32
    b = 4
    x1 = 0
    y1 = 16.29
    y2 = 7.66
   ElseIf r = 2 Then
    a = 20
    b = 2
    x1 = 24.01
    y1 = 7.66
    y2 = 3.82
   Else
    a = 11
    b = 2
    x1 = 43.05
    y1 = 3.82
    y2 = 0
   End If
   For u = 1 To b
    m = 0
    For l = 1 To k - 6
     If Val(Trim(Mid(Cells(13 + k + l, n), 19, 10))) > x1 And Val(Trim(Mid(Cells(13 + k + l, n), 19, 10))) < 64.315 And Val(Trim(Right(Cells(13 + k + l, n), 11))) >= y1 - (y1 - y2) / b * (u) And Val(Trim(Right(Cells(13 + k + l, n), 11))) < y1 - (y1 - y2) / b * (u - 1) Then
      m = m + 1
     End If
    Next
    i = 0
    ReDim dat(1 To m, 1 To 2)
    For l = 1 To k - 6
     If Val(Trim(Mid(Cells(13 + k + l, n), 19, 10))) > x1 And Val(Trim(Mid(Cells(13 + k + l, n), 19, 10))) < 64.315 And Val(Trim(Right(Cells(13 + k + l, n), 11))) >= y1 - (y1 - y2) / b * (u) And Val(Trim(Right(Cells(13 + k + l, n), 11))) < y1 - (y1 - y2) / b * (u - 1) Then
```

```
74          i = i + 1
75          dat(i, 1) = Val(Trim(Left(Right(Cells(13 + l, n), 22), 10)))
76          dat(i, 2) = Val(Trim(Mid(Cells(13 + k + l, n), 19, 10)))
77         End If
78        Next
79        For g = 1 To a
80         j = j + 1
81         i = 0
82         c = 0
83         For l = 1 To m
84          If dat(l, 2) > x1 + (64.315 - x1) / a * (g - 1) And dat(l, 2) <= x1 + (64.315 - x1) / a *
                (g) Then
85           c = c + 1
86          End If
87          If dat(l, 2) > x1 + (64.315 - x1) / a * (g - 1) And dat(l, 2) <= x1 + (64.315 - x1) / a *
                (g) And dat(l, 1) >= 0.0002 Then
88           i = i + (dat(l, 1) * 10 ^ 4) - 1.999
89          End If
90         Next
91         If i = 0 Then
92          ff(j, 2) = i
93         Else
94          ff(j, 2) = i / c
95         End If
96         ff(j, 1) = j
97        Next
98       Next
99      Next
100 'berechnet wird die Summe der Überschreitungen des Rissbreiten-Grenzwertes von 0.2mm, der im
        Element befindlichen Integrationspunkte mit Rissbreiten über 0.2mm
101 'die Summe wird anschließend auf die Anzahl an Integrationspunkten im Element bezogen um
        Fensteraussparungen zu berücksichtigen
102    If n = 1 Then
103     ReDim f1(1 To 190, 1 To 2)
104     f1 = ff
105    Else
106     ReDim f2(1 To 190, 1 To 2)
107                   c = 0
108     For b = 1 To 190
109      For m = 1 To 190
110       i = 0
111       For a = 1 To 190
112        If ff(m, 2) >= ff(a, 2) Then
113         i = i + 1
114        End If
115       Next
116       If i = 190 + 1 - b Then
117                            c = c + 1
118        f2(c, 1) = ff(m, 1)
119        f2(c, 2) = ff(m, 2)
120       End If
121      Next
122     Next
123     Cells(13, 4) = "Rasterelementnr."
124     Cells(13, 5) = "Summe der Rissbreitenüberschreitungen"
125     Range(Cells(14, 4), Cells(13 + 5, 5)) = f2
126     ReDim f3(1 To 190, 1 To 2)
127     For r = 1 To 190
128      f3(r, 2) = f1(r, 2) - ff(r, 2)
129      f3(r, 1) = ff(r, 1)
130     Next
131     ReDim f4(1 To 190, 1 To 2)
132                   c = 0
133     For b = 1 To 190
134      For m = 1 To 190
135       i = 0
136       For a = 1 To 190
137        If f3(m, 2) >= f3(a, 2) Then
138         i = i + 1
139        End If
140       Next
141       If i = 190 + 1 - b Then
142                            c = c + 1
```

```
143           f4(c, 1) = f3(m, 1)
144           f4(c, 2) = f3(m, 2)
145         End If
146       Next
147     Next
148     Cells(19, 5) = "Differenz der Summen"
149     Range(Cells(20, 4), Cells(19 + 5, 5)) = f4
150     For g = 1 To 5
151       Cells(25 + g, 4) = f4(190 - g + 1, 1)
152       Cells(25 + g, 5) = f4(190 - g + 1, 2)
153 'in Spalte D, ab Zeile 13, werden die 5 Rasterelemente mit den größten Summen der
      Rissbreitenüberschreitungen des Modells in Spalte F ausgegeben, rechts daneben werden die
      entsprechenden Summen angezeigt
154 'ab Zeile 20 werden die 5 Elemente mit der größten Abnahme der Summen des Modells in Spalte F im
      Vergleich zum Modell in Spalte A ausgegeben, rechts daneben befinden sich die dazugehörigen
      Differenzen der Elementsummen
155 'ab Zeile 26 werden die 5 Elemente mit der größten Zunahme der Summen des Modells in Spalte F im
      Vergleich zum Modell in Spalte A ausgegeben, rechts daneben befinden sich die dazugehörigen
      Differenzen der Elementsummen
156     Next
157   End If
158 Next
159 End Sub
```